

- > que F_3 possède autant d'hexagones de chaque couleur. Or F_3 n'a pas le même nombre de pavés de chaque couleur : il y en a 43 de couleur rouge, 40 de couleur bleue et 40 de couleur orange. Elle est donc impossible à paver avec des A et des B.

ÉNIGME 3: SE CONNAÎTRE OU S'IGNORER

Soit k un entier positif. Lorsque n est assez grand, on peut être certain que dans toute assemblée de n personnes, il y en a k qui se connaissent mutuellement, ou alors k qui ne se connaissent pas du tout les unes les autres. Il est intéressant de connaître le plus petit entier n , noté $R(k)$, qui assure cette propriété.

Comme dans l'énigme précédente, nous allons rencontrer une impossibilité ; elle est ici encore plus étonnante. Lorsque 6 personnes se rencontrent, alors nécessairement 3 d'entre elles se connaissent mutuellement (a et b se connaissent, b et c se connaissent, a et c se connaissent) ou 3 d'entre elles ne se connaissent pas (a et b ne se connaissent pas, b et c ne se connaissent pas, a et c ne se connaissent pas). On montre cela par le raisonnement (*voir plus loin dans le texte*) ou en écrivant un programme qui examine tous les cas possibles, qui sont en nombre fini (il y a précisément $2^{15} = 32768$ graphes à examiner, les personnes étant représentées par des nœuds et leur connaissance mutuelle par des arêtes). Avec moins de 6 personnes, la propriété n'est plus vraie. Avec plus de 6 personnes, la propriété est bien sûr toujours vraie. On dit que le nombre de Ramsey pour $k=3$ vaut 6, et on écrit $R(3)=6$. Pour $k=4$, le nombre de Ramsey est 18 : $R(4)=18$. Vous allez être très surpris concernant $R(5)$, le nombre de Ramsey pour $k=5$. Pourquoi ?

Solution : La surprise n'est pas que le nombre $R(5)$ n'existe pas ou qu'il soit très grand. La surprise est que personne aujourd'hui ne connaît ce nombre. On sait juste qu'il est compris entre 43 et 48. L'idée d'énumérer par exemple tous les graphes à 43 nœuds pour savoir si 43 convient ou pas est difficile à mettre en œuvre, même avec les plus puissants ordinateurs, car il y en a trop. En effet, il existe $2^{43 \times 21}$ graphes possibles ayant 43 nœuds, nombre supérieur à 6×10^{271} , or les calculs les plus importants menés pour résoudre des problèmes (par exemple pour casser des systèmes

de chiffrement cryptographique) ne comportent au mieux que 10^{21} ou 10^{22} opérations élémentaires, ce qui est très inférieur au nombre en question ici.

On a longtemps disposé uniquement du majorant 49. Ce n'est que récemment que l'on a gagné une unité et que l'on est certain que $R(5) \leq 48$. Ce progrès est dû à un travail associant des raisonnements et des calculs massifs par ordinateur menés à leur terme en avril 2017 par Vigleik Angelteit et Brendan McKay de l'université australienne à Canberra (*voir* <https://arxiv.org/pdf/1703.08768.pdf>).

Au sujet de ces nombres si faciles à définir et pourtant si difficiles à calculer, le mathématicien hongrois Paul Erdős s'amuse à faire comprendre qu'on ne pourrait jamais aller très loin dans la connaissance des $R(n)$ en racontant l'histoire suivante :

« Si des extraterrestres bien plus puissants que nous arrivent sur Terre et nous demandent la valeur de $R(5)$ sous la menace d'une destruction totale de la planète, alors il faudra enrôler tous nos ordinateurs et tous nos mathématiciens pour calculer ce nombre. En revanche, s'ils nous demandent $R(6)$, nous n'aurons pas d'autres choix que de tenter de les anéantir. »

Si on se limite à la première partie de l'histoire (l'exigence de calculer $R(5)$), il se peut que l'on soit, même sans menace extraterrestre, capable d'y arriver un jour prochain. En effet, de très gros efforts de calcul ont été entrepris pour trouver des graphes à 43 nœuds qui ne contiennent ni sous-ensemble de 5 nœuds sans lien, ni sous-ensemble de 5 nœuds tous liés. De tels graphes prouveraient que $R(5) > 43$. Ne pas en trouver suggère que $R(5) = 43$ (sans bien sûr que cela puisse être considéré comme une preuve).

Ces recherches infructueuses font cependant espérer que, associé à quelques progrès dans les raisonnements sur ces graphes, on pourrait prochainement prouver définitivement que $R(5) = 43$. Si Erdős était vivant, il faudrait donc qu'il envisage de reformuler son histoire... et moi l'énigme proposée ici. Cela serait facile, car, par exemple concernant $R(6)$, on sait seulement qu'il est compris entre 102 et 165. Pour $R(10)$, notre ignorance est sidérante : on sait seulement qu'il est compris entre 798 et 23556 (*voir le tableau de la figure 3*). Sur ces questions, voir l'article de S. Radziszowski dans la bibliographie.

Si le calcul massif est parfois indispensable pour calculer des nombres de Ramsey, le raisonnement n'est pas interdit, et c'est peut-être parce qu'on ne le maîtrise pas bien qu'on doit faire appel aux ordinateurs. À titre d'exemple, voici une démonstration que $R(3) = 6$.

Soit une réunion de 6 personnes, parmi lesquelles Alain. Ou bien Alain connaît au moins trois d'entre elles (*cas 1*), ou bien c'est le

3

LES NOMBRES DE RAMSEY DE 1 À 10

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R(k)	1	2	6	18	Entre 43 et 48	Entre 102 et 165	Entre 205 et 540	Entre 282 et 1870	Entre 565 et 6588	Entre 798 et 23556