

Voici une série de formules qui, elles, donnent une infinité de nombres palindromes composés:

$11 \times 11 \times 11 = 1331$
 $11 \times 11 \times 111 = 13431$
 $11 \times 11 \times 1111 = 134431$
 $11 \times 11 \times 11111 = 1344431$
 $11 \times 11 \times 111111 = 13444431$
 ...
 Ajoutons encore deux séries infinies:
 $11 \times 111 \times (11...11) = 13566...66531$
 et $11 \times 111 \times (11...11) = 136899...9998631$

FACTEURS PREMIERS ET CONJECTURES

William Banks a démontré qu'il existe des nombres palindromes ayant un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Il existe donc par exemple des nombres palindromes ayant plus de 1 000 facteurs premiers. Il a aussi établi qu'il existe des nombres palindromes ayant des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire; il existe par exemple des nombres palindromes ayant un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sataka, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes tend vers 0. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$ ($\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x). On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes: la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev: les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont uniquement 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les 8 premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer «nombre premier triplement palindrome» un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	$9 + 2$	11
3	$7 \times 7 \times 7$	343
4	$9 \times (9 \times 9 + 2)$	747
5	$9 \times 9 \times 9 \times 9 - 5$	6556
6	$3 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8$	65856
7	$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (9 + 2)$	405504
8	$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 - 4$	4251524
9	$8 \times 8 \times (5 \times 6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 + 2)$	8847488
10	$7 \times 7 \times 7 \times 8 \times (7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 - 4)$	88499488
11	$6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (6 \times 7 \times 9 \times 9 \times 9 + 8)$	846747648
12	$7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (4 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 - 3)$	4095995904
13	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times (7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 6)$	23613431632
14	$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times (9 \times 9 + 2) \times (4 \times 7 \times 7 \times 8 - 6)$	68899199886
15	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times (2 + 9) \times (9 \times 9 \times 9 + 3)$	633498894336

UN JEU AVEC LES PALINDROMES

4

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (voir <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés, mais ils sont peut-être améliorables pour 10 chiffres utilisés ou plus.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

ET QUAND ON CHANGE DE BASE ?

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases ?

Les calculs du nombre de nombres palindromes faits pour la base 10 se généralisent sans difficulté à une base $b > 1$. La propriété «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11» devient sans surprise: «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321₅ est divisible par 6: $123321_5 = 5^5 + 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 = 4836 = 806 \times 6$.

Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24: