

Voici une série de formules qui, elles, donnent une infinité de nombres palindromes composés:

$$\begin{aligned}11 \times 11 \times 11 &= 1331 \\11 \times 11 \times 111 &= 13431 \\11 \times 11 \times 1111 &= 134431 \\11 \times 11 \times 11111 &= 1344431 \\11 \times 11 \times 111111 &= 13444431\end{aligned}$$

...

Ajoutons encore deux séries infinies:

$$\begin{aligned}11 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 13566 \dots 66531 \\ \text{et } 111 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 136899 \dots 9998631\end{aligned}$$

FACTEURS PREMIERS ET CONJECTURES

William Banks a démontré qu'il existe des nombres palindromes ayant un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Il existe donc par exemple des nombres palindromes ayant plus de 1 000 facteurs premiers. Il a aussi établi qu'il existe des nombres palindromes ayant des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire; il existe par exemple des nombres palindromes ayant un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sataka, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes tend vers 0. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$ ($\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x). On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes: la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev: les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont uniquement 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les 8 premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer «nombre premier triplement palindrome» un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	9+2	11
3	7×7×7	343
4	9×(9×9+2)	747
5	9×9×9×9-5	6556
6	3×7×7×8×8×8	65856
7	8×8×8×8×9×(9+2)	405504
8	8×9×9×9×9×9×9-4	4251524
9	8×8×(5×6×8×8×8×9+2)	8847488
10	7×7×7×8×(7×8×8×8×9-4)	88499488
11	6×8×8×8×9×(6×7×9×9×9+8)	846747648
12	7×8×8×8×8×9×(4×7×7×9×9-3)	4095995904
13	7×7×7×7×8×(7×7×7×8×8×8+6)	23613431632
14	9×9×9×9×9×9×(9×9+2)×(4×7×7×8-6)	68899199886
15	7×7×7×7×8×8×8×8×(2+9)×(9×9×9+3)	633498894336

UN JEU AVEC LES PALINDROMES

4

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (voir <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés, mais ils sont peut-être améliorables pour 10 chiffres utilisés ou plus.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

ET QUAND ON CHANGE DE BASE ?

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases ?

Les calculs du nombre de nombres palindromes faits pour la base 10 se généralisent sans difficulté à une base $b > 1$. La propriété «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11» devient sans surprise: «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321₅ est divisible par 6: $123321_5 = 5^5 + 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 = 4836 = 806 \times 6$.

Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24: