

Voici une série de formules qui, elles, donnent une infinité de nombres palindromes composés:

$$\begin{aligned} 11 \times 11 \times 11 &= 1331 \\ 11 \times 11 \times 111 &= 13431 \\ 11 \times 11 \times 1111 &= 134431 \\ 11 \times 11 \times 11111 &= 1344431 \\ 11 \times 11 \times 111111 &= 13444431 \end{aligned}$$

...

Ajoutons encore deux séries infinies:

$$\begin{aligned} 11 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 13566 \dots 66531 \\ \text{et } 111 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 136899 \dots 9998631 \end{aligned}$$

FACTEURS PREMIERS ET CONJECTURES

William Banks a démontré qu'il existe des nombres palindromes ayant un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Il existe donc par exemple des nombres palindromes ayant plus de 1 000 facteurs premiers. Il a aussi établi qu'il existe des nombres palindromes ayant des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire; il existe par exemple des nombres palindromes ayant un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sataka, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes tend vers 0. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$ ($\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x). On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes: la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev: les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont uniquement 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les 8 premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer «nombre premier triplement palindrome» un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	$9 + 2$	11
3	$7 \times 7 \times 7$	343
4	$9 \times (9 \times 9 + 2)$	747
5	$9 \times 9 \times 9 \times 9 - 5$	6556
6	$3 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8$	65856
7	$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (9 + 2)$	405504
8	$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 - 4$	4251524
9	$8 \times 8 \times (5 \times 6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 + 2)$	8847488
10	$7 \times 7 \times 7 \times 8 \times (7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 - 4)$	88499488
11	$6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (6 \times 7 \times 9 \times 9 \times 9 + 8)$	846747648
12	$7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 \times (4 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 - 3)$	4095995904
13	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times (7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 + 6)$	23613431632
14	$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times (9 \times 9 + 2) \times (4 \times 7 \times 7 \times 8 - 6)$	68899199886
15	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times (2 + 9) \times (9 \times 9 \times 9 + 3)$	633498894336

UN JEU AVEC LES PALINDROMES

4

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (voir <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés, mais ils sont peut-être améliorables pour 10 chiffres utilisés ou plus.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

ET QUAND ON CHANGE DE BASE?

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases?

Les calculs du nombre de nombres palindromes faits pour la base 10 se généralisent sans difficulté à une base $b > 1$. La propriété «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11» devient sans surprise: «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321₅ est divisible par 6: $123321_5 = 5^5 + 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 = 4836 = 806 \times 6$.

Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24:

> $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois?»

Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$?»

Une petite exploration montre que oui. On en trouve aisément. Un bel exemple est 105. En effet: $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$.

Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Bien évidemment, il est intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls: encore une conjecture!

SOMMES DE NOMBRES PALINDROMES

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est l'affirmation dénommée conjecture faible de Goldbach, mais qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, qui est chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach, qui, elle, attend toujours une démonstration.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes? Donnent-elles tous les entiers? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui parfaitement les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes:

21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1091, 1092, 1093, 1094, ...

C'est la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane. Il est assez aisé de vérifier qu'un nombre n de cette liste n'est pas la somme de deux palindromes. On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

PYRAMIDES

5

Si, en partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées ci-contre sont possibles.

En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes).

La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne de

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
373929373	733929337						

l'une d'elles étant :
13189272993373301274751519389
4339011971272339635702075369
33272179110933498915157472103
37339927298131. Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28. En partant de 5 ou 7, on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29.

Tous ces résultats proviennent de G. L. Honaker et Chris Caldwell, deux passionnés américains des nombres

premiers. On trouvera ces résultats dans leur article « Palindromic prime pyramids », *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000, dont des compléments ont été ajoutés sur :
http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html
et sur :
<http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/>.