

> $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois?»

Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$?»

Une petite exploration montre que oui. On en trouve aisément. Un bel exemple est 105. En effet: $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$.

Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Bien évidemment, il est intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls: encore une conjecture!

SOMMES DE NOMBRES PALINDROMES

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est l'affirmation dénommée conjecture faible de Goldbach, mais qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, qui est chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach, qui, elle, attend toujours une démonstration.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes? Donnent-elles tous les entiers? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui parfaitement les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes:

21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1091, 1092, 1093, 1094, ...

C'est la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane. Il est assez aisé de vérifier qu'un nombre n de cette liste n'est pas la somme de deux palindromes. On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

PYRAMIDES

5

Si, en partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées ci-contre sont possibles.

En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes).

La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne de

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
373929373	733929337						

l'une d'elles étant :
13189272993373301274751519389
4339011971272339635702075369
33272179110933498915157472103
37339927298131. Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28. En partant de 5 ou 7, on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29.

Tous ces résultats proviennent de G. L. Honaker et Chris Caldwell, deux passionnés américains des nombres

premiers. On trouvera ces résultats dans leur article « Palindromic prime pyramids », *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000, dont des compléments ont été ajoutés sur :
http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html
et sur :
<http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/>.