

> $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois?»

Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$?»

Une petite exploration montre que oui. On en trouve aisément. Un bel exemple est 105. En effet: $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$.

Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Bien évidemment, il est intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls: encore une conjecture!

SOMMES DE NOMBRES PALINDROMES

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est l'affirmation dénommée conjecture faible de Goldbach, mais qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, qui est chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach, qui, elle, attend toujours une démonstration.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes? Donnent-elles tous les entiers? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui parfaitement les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes:

21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1091, 1092, 1093, 1094, ...

C'est la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane. Il est assez aisé de vérifier qu'un nombre n de cette liste n'est pas la somme de deux palindromes. On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

PYRAMIDES

5

Si, en partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées ci-contre sont possibles.

En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes).

La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne de

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
373929373	733929337						

l'une d'elles étant :
13189272993373301274751519389
4339011971272339635702075369
33272179110933498915157472103
37339927298131. Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28. En partant de 5 ou 7, on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29.

Tous ces résultats proviennent de G. L. Honaker et Chris Caldwell, deux passionnés américains des nombres

premiers. On trouvera ces résultats dans leur article « Palindromic prime pyramids », *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000, dont des compléments ont été ajoutés sur :
http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html
et sur :
<http://www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/>.

BIBLIOGRAPHIE

J. Cilleruelo et F. Luca, **Every positive integer is a sum of three palindromes**, prépublication arXiv:1602.06208, 2016.

A. Bérczes et V. Ziegler, **On simultaneous palindromes**, *J. Comb. Number Theory*, vol. 6, pp. 37-49, 2014.

Y. Bugeaud, **Automatic continued fractions are transcendental or quadratic**, prépublication arXiv:1012.1709, 2010.

B. Adamczewski et Y. Bugeaud, **Palindromic continued fractions**, *Annales de l'institut Fourier*, vol. 57(5), pp. 1557-1574, 2007.

G. L. Honaker et C. Caldwell, **Palindromic prime pyramids**, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000.

E. Friedman, **Problem of the Month**, juin 1999 : <http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html>

Joseph DeVincentis et Ulrich Schimke ont démontré qu'il existe une infinité d'entiers qui ne sont pas somme de deux nombres palindromes. L'affaire est entendue: en effectuant la somme de deux nombres palindromes, on n'obtient qu'une petite partie des entiers.

Le plus beau résultat concernant les sommes de palindromes est récent, mais lui aussi tout aussi définitif: «Tout nombre entier est somme de trois nombres palindromes au plus.» Le nombre 2000, par exemple, est la somme de 616, 383 et 1001.

Le résultat a été obtenu en deux temps. D'abord, en 2015, William Banks a démontré qu'en base 10, tout entier est somme d'au plus 49 nombres palindromes. Il semblait alors qu'on était au début d'une série de résultats où, progressivement, on remplacerait 49 par des entiers de plus en plus petits.

En fait, l'affaire fut magistralement traitée d'un seul coup. Javier Cilleruelo, de l'université de Madrid, et Florian Luca, mathématicien roumain aujourd'hui à l'université de Witwatersrand, à Johannesburg (Afrique du Sud), ont en effet démontré en 2016 dans un article de 39 pages que: «Dans toute base $b \geq 5$, tout entier s'écrit comme une somme d'au plus trois nombres palindromes.» La démonstration est constructive, puisqu'elle décrit un algorithme qui conduit, pour tout entier donné, à la somme recherchée. Cette prouesse nous rappelle la démonstration de Gauss en 1796 établissant que tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires (c'est-à-dire de la forme $n(n+1)/2$).

L'article revient aussi sur les sommes de deux palindromes et montre que les entiers qui ne sont pas somme de deux palindromes sont très nombreux dans le sens suivant: pour chaque base $b \geq 2$, il existe une constante strictement positive c telle que les nombres qui ne sont pas somme de deux palindromes représentent une proportion des nombres entiers supérieure à c . Javier Cilleruelo et Florian Luca conjecturent, sans toutefois réussir à la démontrer, une propriété analogue pour les nombres entiers qui sont la somme de deux palindromes.

INFINIMENT PALINDROME

Terminons par un remarquable résultat concernant les palindromes infinis et les nombres réels transcendants. Pour l'énoncer, il faut d'abord évoquer la notion de nombre infiniment palindrome et celle de fraction continue.

Considérons la suite de symboles composée uniquement de a et de b définie en partant de ab et en ajoutant son complément ba (chaque a est remplacé par b et chaque b par a), ce qui donne $abba$, puis en recommençant en ajoutant le complément de ce qu'on vient

d'obtenir, ce qui donne $abbabaab$, et en recommençant indéfiniment:

$abbabaabbaababba$,

$abbabaabbaababbabaabbaabbaabbaab$, etc.

On obtient une suite infinie de a et de b dont les 4 premiers symboles sont un palindrome, de même que les 16 premiers symboles, de même que les 64 premiers symboles, etc. On dit que c'est un mot «infiniment palindrome»: ses débuts sont une infinité de fois des palindromes.

Quand on dispose d'une suite infinie d'entiers positifs $a_0, a_1, a_2, \dots$ il est usuel en arithmétique de considérer le nombre réel suivant dénommé fraction continue associée à la suite $a_0, a_1, a_2, \dots$:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Un extraordinaire résultat de Boris Adamczewski et Yann Bugeaud établit que si la suite de nombres entiers est infiniment palindrome, alors le nombre réel défini par la fraction continue associée est soit un nombre quadratique, soit un nombre transcendant, c'est-à-dire que soit il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré 2 au plus, soit il n'est la solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dit encore autrement, les nombres réels définis par des fractions continues infiniment palindromes sont élémentaires ou alors aussi compliqués que les nombres π ou e (qui sont transcendants). C'est bien sûr un moyen nouveau de définir des nombres transcendants. En particulier, le nombre x obtenu en prenant $a=1$ et $b=2$ dans le mot infiniment palindrome indiqué plus haut et en écrivant la fraction continue associée est transcendant:

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

On aimerait avoir un résultat analogue concernant les nombres dont l'écriture en base B est une suite infiniment palindrome. Mais pour l'instant, les techniques disponibles achoppent et à nouveau on est réduit à des conjectures.

Amusements sans prétention ou résultats profonds et difficiles, voire seulement conjecturés, les palindromes occupent passionnément les mathématiciens qui y découvrent mille merveilles insoupçonnées. ■