

Pourquoi l'énoncé de Fermat, qui est simple et anodin en apparence, a-t-il acquis une telle célébrité ?

Il y a tout d'abord le contraste entre le côté élémentaire de cet énoncé et la difficulté extrême de sa preuve que moi-même, par exemple, serais incapable de comprendre en détail sans avoir fait trois ou quatre années d'études préalables. L'énoncé de Fermat a attiré une multitude de mathématiciens amateurs, qui rêvaient de pouvoir entrer dans l'histoire en trouvant, un peu sur un coup de chance, une preuve. C'est encore le cas aujourd'hui, avec des gens qui sont persuadés qu'il existe une démonstration beaucoup plus simple que celle d'Andrew Wiles. Et au fil des siècles, plusieurs mathématiciens éminents ont, au détour de leurs travaux, prouvé le théorème de Fermat pour des valeurs particulières de l'exposant n . Un autre élément d'attrait est l'anecdote historique avec, en particulier, l'erreur ou le bluff de Fermat qui, dans la marge d'un livre, a écrit avoir découvert une démonstration merveilleuse, mais trop longue pour figurer dans cette marge. Il y a un roman derrière le grand théorème de Fermat, et il est haut en couleur !

Le « grand théorème de Fermat » est-il important pour la théorie des nombres ?

En soi, non. Ce théorème a ici et là quelques conséquences, mais les méthodes développées pour le démontrer sont de loin plus importantes que le résultat lui-même. Et c'est une histoire qui a été pleine de rebondissements au cours des dernières décennies. Dans les années 1980, Andrew Wiles, qui était fasciné depuis son enfance par la conjecture de Fermat, a compris que certains développements dans le domaine où il faisait ses recherches (la géométrie algébrique) lui permettraient peut-être d'élaborer une démonstration. Il a alors travaillé en secret durant des années, avant d'annoncer lors d'un séminaire en 1993 y être parvenu. Mais sa preuve comportait une erreur, et il a fallu l'aide de son ancien étudiant Richard Taylor pour la réviser et l'achever, dans une course de vitesse pour ne pas se faire doubler par quelqu'un d'autre. Les méthodes mobilisées pour ce théorème continuent d'ailleurs de bouger, afin de réécrire la preuve et mieux relier l'énoncé de Fermat à d'autres sujets. Tout cela touche des domaines parmi les plus prestigieux des mathématiques, ceux qui font le plus rêver – la théorie des nombres, la géométrie algébrique, champs où l'activité est intense et où l'école française a d'ailleurs une forte expertise.

Pouvez-vous donner une idée de la démarche suivie par Andrew Wiles ?

Depuis 1986, on savait, à la suite de divers travaux, que la conjecture de Fermat pouvait être vue comme un cas particulier d'un énoncé plus

vaste et plus technique, la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. Cette « conjecture STW » datant des années 1960 prédisait une sorte de dictionnaire, de correspondance, entre les « courbes elliptiques » – des courbes (qui ne sont pas des ellipses...) définies par des équations algébriques du troisième degré à coefficients entiers, et dont on ne considère que les points à coordonnées rationnelles – et des fonctions particulières, les « fonctions modulaires ». Or on peut associer une certaine courbe elliptique à l'équation de Fermat et on a montré que si cette équation avait des solutions en nombres entiers, alors la courbe elliptique correspondante ne vérifierait pas la conjecture STW. Par conséquent, si la conjecture STW est vraie, il s'ensuit que l'équation de Fermat n'a pas de solutions en nombres entiers et le grand théorème de Fermat serait ainsi prouvé. Andrew Wiles a donc entrepris de démontrer la conjecture STW.

C'est ce qu'il a réussi à faire ?

Presque. Andrew Wiles a réussi à démontrer une partie importante de la conjecture STW, qui suffisait à prouver la conjecture de Fermat. La conjecture STW complète a été démontrée plus tard, en 1999, par Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond et Richard Taylor. Cette conjecture est d'ailleurs une brique d'un édifice plus vaste qu'on appelle le programme ou la correspondance de Langlands.

De quoi s'agit-il ?

C'est un ensemble d'idées et de conjectures complexes qui ont été esquissées à la fin des années 1960 par le mathématicien canadien Robert Langlands. Ce programme établit des ponts, ou des correspondances, entre la théorie des nombres et d'autres parties des mathématiques (géométrie algébrique, théorie des groupes, etc.). Il continue à occuper aujourd'hui de nombreux chercheurs brillants, parmi lesquels Laurent Lafforgue (médaille Fields en 2002), Christophe Breuil, Ngô Bao Châu (médaille Fields en 2010)...

Est-il fréquent que la preuve d'un énoncé élémentaire comme celui de Fermat nécessite des mathématiques de très haut niveau ?

Oui, j'y ai moi-même été confronté à plusieurs reprises au cours de ma carrière, dans mes travaux sur la stabilité des gaz et des plasmas. Avec mes collègues, nous nous sommes souvent retrouvés avec des preuves plutôt vertigineuses pour des énoncés qui étaient en eux-mêmes peu compliqués. Le cœur de la preuve peut être assez simple, mais c'est l'enrobage technique qui est très élaboré. Ce qu'on préfère, c'est quand l'idée centrale est à la fois simple et inattendue ; mais ce n'est pas toujours le cas ! ■

Propos recueillis par Maurice Mashaal

BIBLIOGRAPHIE

S. Singh, Le Dernier théorème de Fermat, Fayard, 2011.

R. Langlands, Le programme de Langlands, Pour la Science, n° 361, pp. 122-128, novembre 2007.

A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last theorem, Annals of Mathematics, vol. 141(3), pp. 443-551, 1995.