

2002

La conjecture de Poincaré vaincue

Une célèbre conjecture de topologie énoncée en 1904 par Henri Poincaré résistait aux assauts des chercheurs – jusqu'à ce que Grigori Perelman, mathématicien russe doté d'une personnalité étonnante, prouve l'hypothèse de Poincaré tout en démontrant une conjecture plus vaste.

Avec une série de six articles entamée en 1895 et achevée en 1904, le mathématicien français Henri Poincaré créait ce qu'on appellera la topologie algébrique. Dans ce domaine des mathématiques, on s'efforce d'utiliser l'algèbre pour caractériser les propriétés topologiques d'objets et d'espaces de natures diverses. Poincaré énonça en particulier une conjecture importante portant sur les espaces de dimension 3 et qui est restée longtemps non résolue. Cette célèbre conjecture ne sera démontrée qu'en 2002-2003 par le Russe Grigori Perelman, lequel refusa les récompenses (une médaille Fields et le million de dollars de la fondation Clay) attribuées pour cet exploit.

L'énoncé de la conjecture exige certaines notions préalables. En arrondissant les angles du bord d'un carré, on peut transformer ce dernier en un cercle. On dit que le cercle et le bord du carré sont homéomorphes (c'est-à-dire qu'il existe une bijection continue entre les deux figures). Un topologue s'intéresse à ces transformations homéomorphes et aux propriétés qu'elles conservent.

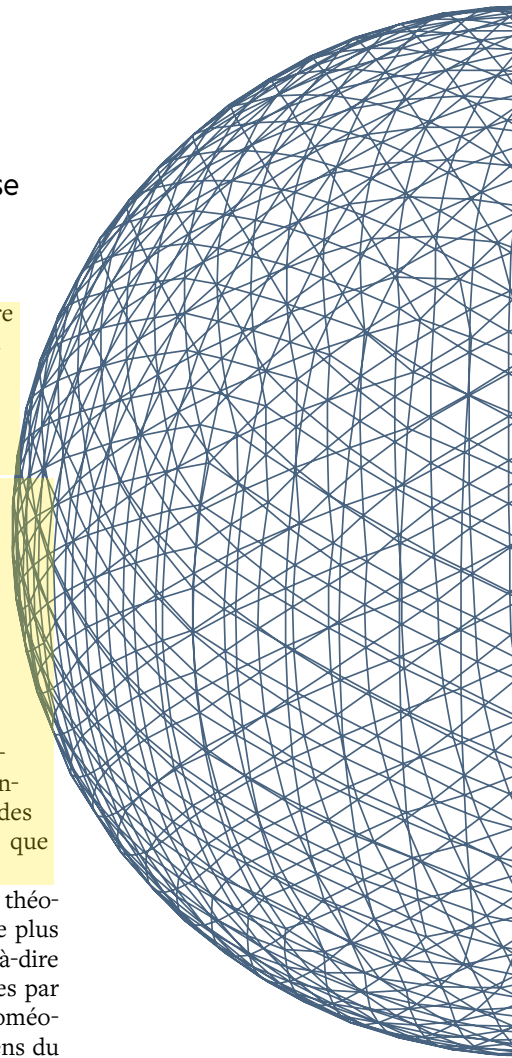
On définit ensuite une variété de dimension n comme un espace dont chaque point a un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, l'espace euclidien de dimension n . Par exemple, la sphère usuelle est une variété de dimension 2 (une surface), car au voisinage de chacun de ses points, on peut se repérer avec 2 coordonnées. Par ailleurs, un espace est dit compact quand il ne contient aucune suite de points qui file à l'infini. Ainsi, une sphère est compacte, mais une droite ne l'est pas. Enfin, un espace est « simplement connexe » lorsque tout lacet (un

chemin fermé) sur cet espace peut être déformé continûment pour se réduire à un point. La sphère est ainsi simplement connexe, mais pas le tore, puisqu'un lacet qui entoure le trou central ne peut être réduit à un point.

On a maintenant tous les éléments pour énoncer la conjecture de Poincaré, qui peut se formuler ainsi: « Toute variété compacte de dimension 3 et simplement connexe est homéomorphe à la sphère de dimension 3. » La sphère (ou hypersphère) de dimension 3 est l'équivalent, dans un espace de dimension 4, de ce qu'est la sphère usuelle (de dimension 2) dans l'espace tridimensionnel. Plus précisément, la sphère de dimension 3 (et de rayon 1) est l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z, t) tels que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

La conjecture de Poincaré, devenue le théorème de Perelman, entre dans un cadre plus large: la géométrisation de l'espace, c'est-à-dire la caractérisation d'espaces topologiques par des objets géométriques qui leur sont homéomorphes. Les travaux des mathématiciens du XIX^e siècle (notamment Gauss et Riemann) auront été nécessaires pour comprendre les surfaces, c'est-à-dire les variétés de dimension 2. Ceux du XX^e siècle l'ont été pour les objets de dimension 3 et pour préparer le terrain à la démonstration par Grigori Perelman de la conjecture de Poincaré.

Dans les années 1970 et 1980, l'Américain William Thurston (mort en 2012) s'est rendu compte que de nombreux espaces topologiques de dimension 3 sont géométrisables. De même qu'en dimension 2, la géométrie euclidienne a



La sphère usuelle est le bord (une surface) de la boule de dimension 3. La sphère en question dans la conjecture de Poincaré est un espace tridimensionnel, qui constitue le bord de la boule de dimension 4...