

2002

La conjecture de Poincaré vaincue

Une célèbre conjecture de topologie énoncée en 1904 par Henri Poincaré résistait aux assauts des chercheurs – jusqu'à ce que Grigori Perelman, mathématicien russe doté d'une personnalité étonnante, prouve l'hypothèse de Poincaré tout en démontrant une conjecture plus vaste.

Avec une série de six articles entamée en 1895 et achevée en 1904, le mathématicien français Henri Poincaré créait ce qu'on appellera la topologie algébrique. Dans ce domaine des mathématiques, on s'efforce d'utiliser l'algèbre pour caractériser les propriétés topologiques d'objets et d'espaces de natures diverses. Poincaré énonça en particulier une conjecture importante portant sur les espaces de dimension 3 et qui est restée longtemps non résolue. Cette célèbre conjecture ne sera démontrée qu'en 2002-2003 par le Russe Grigori Perelman, lequel refusa les récompenses (une médaille Fields et le million de dollars de la fondation Clay) attribuées pour cet exploit.

L'énoncé de la conjecture exige certaines notions préalables. En arrondissant les angles du bord d'un carré, on peut transformer ce dernier en un cercle. On dit que le cercle et le bord du carré sont homéomorphes (c'est-à-dire qu'il existe une bijection continue entre les deux figures). Un topologue s'intéresse à ces transformations homéomorphes et aux propriétés qu'elles conservent.

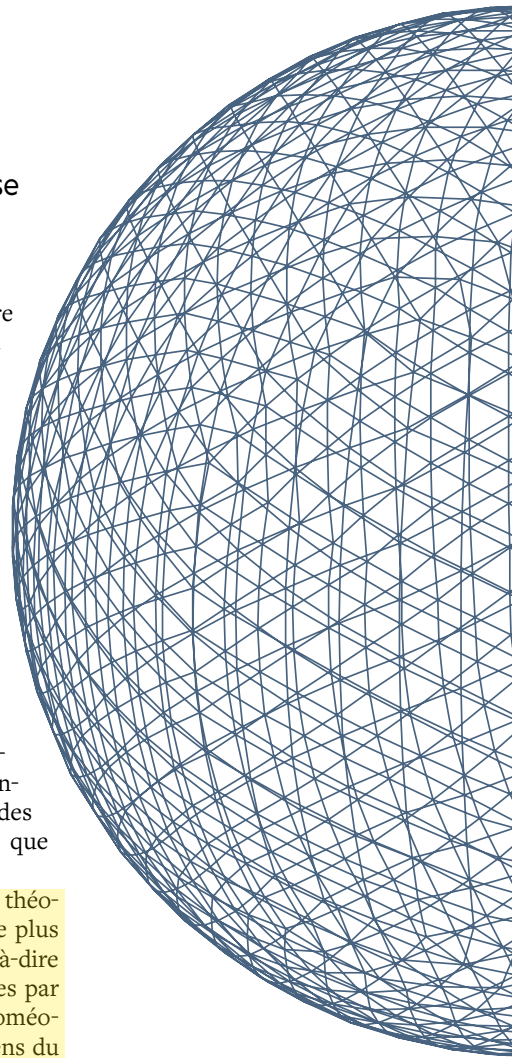
On définit ensuite une variété de dimension n comme un espace dont chaque point a un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, l'espace euclidien de dimension n . Par exemple, la sphère usuelle est une variété de dimension 2 (une surface), car au voisinage de chacun de ses points, on peut se repérer avec 2 coordonnées. Par ailleurs, un espace est dit compact quand il ne contient aucune suite de points qui file à l'infini. Ainsi, une sphère est compacte, mais une droite ne l'est pas. Enfin, un espace est « simplement connexe » lorsque tout lacet (un

chemin fermé) sur cet espace peut être déformé continûment pour se réduire à un point. La sphère est ainsi simplement connexe, mais pas le tore, puisqu'un lacet qui entoure le trou central ne peut être réduit à un point.

On a maintenant tous les éléments pour énoncer la conjecture de Poincaré, qui peut se formuler ainsi: « Toute variété compacte de dimension 3 et simplement connexe est homéomorphe à la sphère de dimension 3. » La sphère (ou hypersphère) de dimension 3 est l'équivalent, dans un espace de dimension 4, de ce qu'est la sphère usuelle (de dimension 2) dans l'espace tridimensionnel. Plus précisément, la sphère de dimension 3 (et de rayon 1) est l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z, t) tels que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

La conjecture de Poincaré, devenue le théorème de Perelman, entre dans un cadre plus large: la géométrisation de l'espace, c'est-à-dire la caractérisation d'espaces topologiques par des objets géométriques qui leur sont homéomorphes. Les travaux des mathématiciens du XIX^e siècle (notamment Gauss et Riemann) auront été nécessaires pour comprendre les surfaces, c'est-à-dire les variétés de dimension 2. Ceux du XX^e siècle l'ont été pour les objets de dimension 3 et pour préparer le terrain à la démonstration par Grigori Perelman de la conjecture de Poincaré.

Dans les années 1970 et 1980, l'Américain William Thurston (mort en 2012) s'est rendu compte que de nombreux espaces topologiques de dimension 3 sont géométrisables. De même qu'en dimension 2, la géométrie euclidienne a



La sphère usuelle est le bord (une surface) de la boule de dimension 3. La sphère en question dans la conjecture de Poincaré est un espace tridimensionnel, qui constitue le bord de la boule de dimension 4...

L'AUTEUR



ÉTIENNE GHYS
directeur de recherche
au CNRS, unité
de mathématiques
pures et appliquées,
École normale
supérieure de Lyon

deux «sœurs», la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, en dimension 3 la géométrie euclidienne est aussi membre d'une fratrie, plus nombreuse. Outre les géométries sphérique et hyperbolique (analogues à celles de dimension 2), on compte cinq autres géométries, les géométries de Thurston.

UN CAS PARTICULIER DE LA CONJECTURE DE THURSTON

Thurston a étudié un grand nombre d'exemples de variétés topologiques de dimension 3 et a constaté que toutes peuvent être décrites par ces huit géométries. Il a compilé des atlas et encouragé ses étudiants à établir des banques de données informatiques. Son approche était très concrète, presque expérimentale, ce qui est rare en mathématiques !

En 1976, il a formulé sa conjecture selon laquelle les variétés de dimension 3 peuvent être géométrisées par l'une de ces huit géométries. Insistons : les variétés étudiées par Thurston sont purement topologiques et ne sont munies *a priori* d'aucune métrique permettant de définir des distances. La conjecture affirme que ces objets mous que sont les variétés ont cependant une géométrie extrêmement rigide, parmi huit possibilités. La géométrie vient donc au secours de la topologie.

Thurston a lui-même démontré sa conjecture dans de nombreux cas significatifs. Il a utilisé notamment la chirurgie, un ensemble de méthodes permettant de «découper» des variétés et de les «recoller» afin de mieux les comprendre. Dans ce cadre, la conjecture de géométrisation peut s'exprimer ainsi : «Toute variété compacte de dimension 3 peut être découpée selon des tores et des sphères de dimension 2 afin d'obtenir des blocs géométrisables par l'une des huit géométries de Thurston.» La conjecture de Poincaré est alors un cas particulier de la conjecture de Thurston, celui où la variété est simplement connexe.

Ainsi, tout semblait indiquer que la preuve de la conjecture de Thurston allait être de nature topologique, fondée sur la chirurgie. Mais en 2002, un coup de tonnerre retentit avec l'entrée en scène de Grigori Perelman. Il est analyste, un spécialiste des équations aux dérivées partielles, un sujet que beaucoup de topologues avaient l'habitude de regarder de loin.

Grigori Perelman a poursuivi et mené à son terme le programme lancé par Richard Hamilton en 1982. L'idée de ce mathématicien américain était fondée sur le flot de Ricci, une équation d'évolution qui tend à homogénéiser la métrique. Prenez une variété de dimension 3, et choisissez

une métrique quelconque sur cet espace. Cette métrique n'a aucune raison d'être l'une des huit de Thurston, car elle n'est pas nécessairement homogène : elle peut être plus courbée en certains endroits que d'autres, par exemple. Le flot de Ricci appliqué à l'espace donné peut s'imaginer comme une sorte de «chauffage» pendant lequel on laisse diffuser la métrique. Cette dernière atteint alors une espèce de position d'équilibre thermique qui, on l'espère, sera une des huit métriques de Thurston.

Un théorème illustre la méthode. Comment arrondir une courbe quelconque dans le plan ? Un moyen simple d'y parvenir est de la «pousser» dans le sens de sa courbure. Vous poussez tous les points dans le sens de la convexité, peu quand c'est peu courbé et beaucoup lorsque c'est très courbé. En appliquant cette recette en continu, à mesure que la courbe se déforme, le théorème de Gage-Grayson-Hamilton affirme que la courbure s'équilibre et que la courbe tend à devenir un cercle. Le scénario décrit semble évident, mais ce n'est pas le cas. Pourquoi par exemple la courbe ne développerait-elle pas des points doubles ?

C'est là que le bât blessait dans le programme de Hamilton. Lorsque le flot évolue, l'étalement de la courbure n'est pas uniforme. En certains points de la variété, la courbure peut s'accumuler et devenir infinie !

Grigori Perelman a décrit comment apparaissent ces singularités et comment on peut les classer. Fort de cette information, il était alors en mesure de construire, à partir du flot de Ricci, un autre flot débarrassé des singularités à l'aide d'actes de chirurgie. Ainsi s'achevait le programme de Hamilton. La conjecture de géométrisation de Thurston était donc démontrée, et avec elle la conjecture de Poincaré.

Des conjectures analogues à celle de Poincaré en dimension différente de 3 peuvent être construites sur le même modèle. Étonnamment, seul le cas $n=3$, c'est-à-dire la conjecture initiale de Poincaré, résistait. Pour $n=2$, c'est-à-dire pour les surfaces, la conjecture était bien connue de Poincaré, même si, pour en avoir une démonstration complète, il fallut attendre les années 1920. En 1961, Stephen Smale a prouvé la conjecture, par des méthodes de chirurgie, pour les dimensions supérieures ou égales à 7. Puis, en 1962, les cas $n=5$ et 6 ont été résolus par Erik Zeeman et John Stallings par des méthodes similaires. Le cas $n=4$ fut démontré par Michael Freedman en 1982 par une approche complètement différente. Et enfin, Grigori Perelman complétait le tableau en 2003.

Notons pour finir que la preuve de la conjecture de Poincaré, conséquence de celle de la conjecture de Thurston, est un bel exemple d'un cas fréquent en mathématiques : pour résoudre un problème, il est parfois utile de chercher la solution d'un autre plus difficile encore. ■

BIBLIOGRAPHIE

Les articles de G. Perelman sur arXiv : http://bit.ly/PLS481_Perelman

L. Bessières et al., *Images des mathématiques*, CNRS, octobre 2006 : http://bit.ly/PLS481_Poincare