

## L'AUTEUR



ÉTIENNE GHYS  
directeur de recherche  
au CNRS, unité  
de mathématiques  
pures et appliquées,  
École normale  
supérieure de Lyon

deux «sœurs», la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, en dimension 3 la géométrie euclidienne est aussi membre d'une fratrie, plus nombreuse. Outre les géométries sphérique et hyperbolique (analogues à celles de dimension 2), on compte cinq autres géométries, les géométries de Thurston.

## UN CAS PARTICULIER DE LA CONJECTURE DE THURSTON

Thurston a étudié un grand nombre d'exemples de variétés topologiques de dimension 3 et a constaté que toutes peuvent être décrites par ces huit géométries. Il a compilé des atlas et encouragé ses étudiants à établir des banques de données informatiques. Son approche était très concrète, presque expérimentale, ce qui est rare en mathématiques !

En 1976, il a formulé sa conjecture selon laquelle les variétés de dimension 3 peuvent être géométrisées par l'une de ces huit géométries. Insistons : les variétés étudiées par Thurston sont purement topologiques et ne sont munies *a priori* d'aucune métrique permettant de définir des distances. La conjecture affirme que ces objets mous que sont les variétés ont cependant une géométrie extrêmement rigide, parmi huit possibilités. La géométrie vient donc au secours de la topologie.

Thurston a lui-même démontré sa conjecture dans de nombreux cas significatifs. Il a utilisé notamment la chirurgie, un ensemble de méthodes permettant de «découper» des variétés et de les «recoller» afin de mieux les comprendre. Dans ce cadre, la conjecture de géométrisation peut s'exprimer ainsi : «Toute variété compacte de dimension 3 peut être découpée selon des tores et des sphères de dimension 2 afin d'obtenir des blocs géométrisables par l'une des huit géométries de Thurston.» La conjecture de Poincaré est alors un cas particulier de la conjecture de Thurston, celui où la variété est simplement connexe.

Ainsi, tout semblait indiquer que la preuve de la conjecture de Thurston allait être de nature topologique, fondée sur la chirurgie. Mais en 2002, un coup de tonnerre retentit avec l'entrée en scène de Grigori Perelman. Il est analyste, un spécialiste des équations aux dérivées partielles, un sujet que beaucoup de topologues avaient l'habitude de regarder de loin.

Grigori Perelman a poursuivi et mené à son terme le programme lancé par Richard Hamilton en 1982. L'idée de ce mathématicien américain était fondée sur le flot de Ricci, une équation d'évolution qui tend à homogénéiser la métrique. Prenez une variété de dimension 3, et choisissez

une métrique quelconque sur cet espace. Cette métrique n'a aucune raison d'être l'une des huit de Thurston, car elle n'est pas nécessairement homogène : elle peut être plus courbée en certains endroits que d'autres, par exemple. Le flot de Ricci appliqué à l'espace donné peut s'imaginer comme une sorte de «chauffage» pendant lequel on laisse diffuser la métrique. Cette dernière atteint alors une espèce de position d'équilibre thermique qui, on l'espère, sera une des huit métriques de Thurston.

Un théorème illustre la méthode. Comment arrondir une courbe quelconque dans le plan ? Un moyen simple d'y parvenir est de la «pousser» dans le sens de sa courbure. Vous poussez tous les points dans le sens de la convexité, peu quand c'est peu courbé et beaucoup lorsque c'est très courbé. En appliquant cette recette en continu, à mesure que la courbe se déforme, le théorème de Gage-Grayson-Hamilton affirme que la courbure s'équilibre et que la courbe tend à devenir un cercle. Le scénario décrit semble évident, mais ce n'est pas le cas. Pourquoi par exemple la courbe ne développerait-elle pas des points doubles ?

C'est là que le bât blessait dans le programme de Hamilton. Lorsque le flot évolue, l'étalement de la courbure n'est pas uniforme. En certains points de la variété, la courbure peut s'accumuler et devenir infinie !

Grigori Perelman a décrit comment apparaissent ces singularités et comment on peut les classer. Fort de cette information, il était alors en mesure de construire, à partir du flot de Ricci, un autre flot débarrassé des singularités à l'aide d'actes de chirurgie. Ainsi s'achevait le programme de Hamilton. La conjecture de géométrisation de Thurston était donc démontrée, et avec elle la conjecture de Poincaré.

Des conjectures analogues à celle de Poincaré en dimension différente de 3 peuvent être construites sur le même modèle. Étonnamment, seul le cas  $n=3$ , c'est-à-dire la conjecture initiale de Poincaré, résistait. Pour  $n=2$ , c'est-à-dire pour les surfaces, la conjecture était bien connue de Poincaré, même si, pour en avoir une démonstration complète, il fallut attendre les années 1920. En 1961, Stephen Smale a prouvé la conjecture, par des méthodes de chirurgie, pour les dimensions supérieures ou égales à 7. Puis, en 1962, les cas  $n=5$  et 6 ont été résolus par Erik Zeeman et John Stallings par des méthodes similaires. Le cas  $n=4$  fut démontré par Michael Freedman en 1982 par une approche complètement différente. Et enfin, Grigori Perelman complétait le tableau en 2003.

Notons pour finir que la preuve de la conjecture de Poincaré, conséquence de celle de la conjecture de Thurston, est un bel exemple d'un cas fréquent en mathématiques : pour résoudre un problème, il est parfois utile de chercher la solution d'un autre plus difficile encore. ■

## BIBLIOGRAPHIE

Les articles de G. Perelman sur arXiv : [http://bit.ly/PLS481\\_Perelman](http://bit.ly/PLS481_Perelman)

L. Bessières et al., *Images des mathématiques*, CNRS, octobre 2006 : [http://bit.ly/PLS481\\_Poincare](http://bit.ly/PLS481_Poincare)