

- > Sa démonstration utilise un ordinateur, mais la partie humaine préparatoire aux calculs était délicate et personne avant Michaël Rao n'avait su la mener correctement. La démonstration a consisté à ramener l'exploration des cas possibles, qui *a priori* sont en nombre infini, à un nombre fini de cas.

LA DÉMONSTRATION PROCÈDE EN QUATRE ÉTAPES.

Étape 1. Michaël Rao prouve que «si une forme pentagonale convexe P pave le plan, alors elle peut le faire de telle façon que chaque type de sommet du pavage possède une densité positive dans le pavage».

Expliquons cet énoncé. On désigne les 5 sommets du pavé P considéré par les lettres a, b, c, d et e . En certains points M du pavage, se rencontrent plusieurs des sommets du pentagone convexe P, par exemple b, c et e , qui proviennent des différentes versions de P placées autour de M. Cette suite de lettres définit un type de sommet du pavage. Dans un pavage donné, il y a plusieurs types de sommets. Par exemple (voir l'encadré 2), il peut y avoir les trois types de sommets (b, c, e) , (d, d, d) et (a, a, a, a, a) . Cette représentation des types de sommets possibles permettra plus loin de ramener le nombre de cas à traiter, *a priori* infini, à un nombre fini de cas. On aurait pu imaginer qu'un type donné de sommets soit utilisé avec une densité décroissante et tendant vers zéro quand on s'éloigne du centre. Ce que dit le résultat de l'étape 1 du raisonnement de Michaël Rao est que cela ne se produit pas, au moins pour l'un des pavages du plan utilisant le pavé P: pour chaque type T de sommets à envisager, la proportion de sommets de type T dans un pavage utilisant N exemplaires de P sera supérieure à une constante.

Étape 2. Un ensemble de types de sommets pour un pavage donné du plan par des pentagones convexes, par exemple l'ensemble $\{(b, c, e), (d, d, d), (a, a, a, a, a)\}$, a une propriété algébrique particulière (notons-la Q) provenant de sa capacité à paver le plan avec une densité positive pour chaque type de sommets. Cette propriété Q est facile à tester par programme. Celui écrit par Michaël Rao a fait découvrir qu'il n'y a que 371 possibilités différentes pour ces ensembles de types de sommets.

Étape 3. Pour chacun des 371 cas repérés à l'étape 2, on tente d'une manière systématique de paver le plan. Michaël Rao utilise un second programme pour mener cette recherche. Le programme essaye de construire un pavage avec les conditions qu'on s'est fixées sur les angles, mais *a priori* sans conditions sur les côtés. Il explore les pavages possibles et doit faire des hypothèses sur les longueurs des côtés au cours de l'exploration. Si on aboutit à l'un des 15 cas connus, le programme ne va pas plus loin. En effet, on sait alors qu'on peut paver avec ce pentagone et que le motif sera périodique. Les pavages périodiques sont ceux où l'on peut extraire un ensemble fini de pavés et où, à l'aide de deux translations appliquées à ce sous-pavage, on obtient petit à petit le pavage entier.

Il est important de noter que dans le cas général, il existe des ensembles de formes pavant le plan mais qui ne le pavent que non périodiquement. Les ensembles connus de ce type comportent toujours au moins deux pavés différents. Les pavages de Penrose sont de ce type: ils pavent le plan, mais jamais périodiquement.

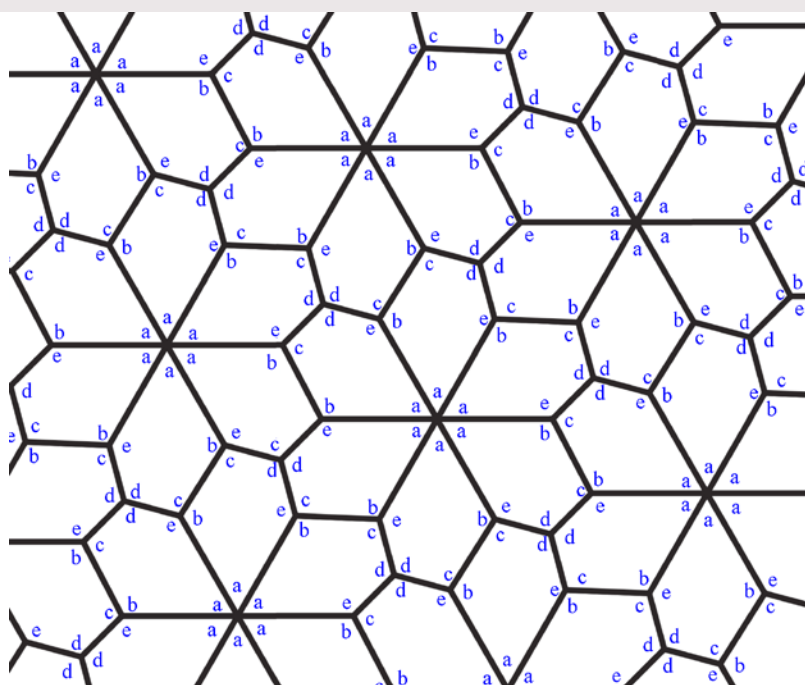
Étape 4. L'analyse des cas qui ont réussi et leurs regroupements (quand plusieurs cas

2

LES TYPES DE SOMMETS D'UN PAVAGE

Dans la démonstration de Michaël Rao, la classification des types de sommets présents dans un pavage joue un rôle important. Dans l'exemple dessiné ici, où les sommets du pentagone utilisé sont notés a, b, c, d, e , on observe qu'en un point du plan où plusieurs pentagones se rencontrent, il existe trois types différents de situations: (a, a, a, a, a) , (b, c, e) et (d, d, d) .

Cet ensemble de 3 types de sommets est l'un des 371 ensembles différents qu'une recherche exhaustive par programme a produits. Après une exploration de chacun de ces 371 ensembles, on n'obtient que 15 formes de pavages différents par des pentagones convexes.



donnent des pavages équivalents) fournissent exactement les 15 formes de pavés pentagonaux convexes connus. Cela prouve que la classification avec les 15 formes est complète.

La méthode ne demande pas une puissance de calcul informatique considérable; elle aurait pu être menée depuis assez longtemps si quelqu'un l'avait imaginée avant Michaël Rao.

Dans cette recherche, on n'a pas supposé que le pavage était périodique. La méthode utilisée dans la démonstration et les calculs montrent donc qu'il n'y a pas de cas essentiellement non périodiques, autrement dit qu'il n'y a aucun pavé pentagonal convexe qui pourrait paver le plan uniquement de façon non périodique. Dit autrement encore: s'il existe un pavé qui pave le plan aperiodiquement et jamais de manière périodique (on dit «qui force la non-périodicité»), alors ce n'est pas un pentagone convexe.

L'une des grandes questions de la théorie mathématique des pavages est de savoir s'il existe un pavé qui, à lui seul, force la non-périodicité. Un tel pavé hypothétique qui forcerait la non-périodicité est dénommé *einstein*, non pas en l'honneur du célèbre physicien, mais parce que cela signifie «une pierre» en allemand (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_problem). La démonstration de Michaël Rao montre donc que s'il existe un pavé *einstein*, ce n'est pas un pentagone convexe.

DES QUESTIONS POSÉES PAR LA DÉMONSTRATION

La preuve a déjà été étudiée par plusieurs spécialistes de ce type de questions et une partie des calculs a été refaite par un programme différent écrit par Thomas Hales, dont nous allons reparler plus loin. Il a confirmé les 371 cas de l'étape 2. Le programme utilisé dans l'étape 3 a été simplifié et contrôlé, et il a toujours donné les mêmes résultats. Tout semble donc parfait. Cependant, plusieurs questions restent posées.

Pourra-t-on simplifier la preuve pour ne plus avoir à utiliser d'ordinateurs? Michaël Rao pense qu'il sera peut-être possible pour l'étape 2 de faire le travail sans ordinateur. Pour l'exploitation des 371 cas un à un, ce chercheur n'exclut pas l'idée qu'une armée de 100 ou 1000 mathématiciens consciencieux puisse mener le calcul et vérifier ce qu'a trouvé la machine. Il juge cependant que ce serait futile et inefficace, puisque, pour ce type de travail, la précision et la fiabilité de la machine sont meilleures que celles des humains. Les calculs sur une machine unique ont duré 40 heures; même si les humains trouveraient sans doute des raccourcis en procédant à la main, il en faudrait beaucoup, et de très déterminés!

Pourrait-on traduire la preuve en une preuve formellement vérifiable? Aujourd'hui, face à une preuve longue et complexe, on tente >

3

DES PENTAGONES NON CONVEXES QUI PAVENT LE PLAN

Les images suivantes sont des pavages du plan par des pentagones non convexes. La variété des images suggère que le problème de leur classification est sans doute aussi délicat ou plus que celui résolu par Michaël Rao. Ces images proviennent du site d'un amateur de récréations mathématiques, Jaap Scherphuis (<https://www.jaapsch.net/tilings/>). Il propose bien d'autres exemples.

