

donnent des pavages équivalents) fournissent exactement les 15 formes de pavés pentagonaux convexes connus. Cela prouve que la classification avec les 15 formes est complète.

La méthode ne demande pas une puissance de calcul informatique considérable; elle aurait pu être menée depuis assez longtemps si quelqu'un l'avait imaginée avant Michaël Rao.

Dans cette recherche, on n'a pas supposé que le pavage était périodique. La méthode utilisée dans la démonstration et les calculs montrent donc qu'il n'y a pas de cas essentiellement non périodiques, autrement dit qu'il n'y a aucun pavé pentagonal convexe qui pourrait paver le plan uniquement de façon non périodique. Dit autrement encore: s'il existe un pavé qui pave le plan aperiodiquement et jamais de manière périodique (on dit «qui force la non-périodicité»), alors ce n'est pas un pentagone convexe.

L'une des grandes questions de la théorie mathématique des pavages est de savoir s'il existe un pavé qui, à lui seul, force la non-périodicité. Un tel pavé hypothétique qui forcerait la non-périodicité est dénommé *einstein*, non pas en l'honneur du célèbre physicien, mais parce que cela signifie «une pierre» en allemand (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_problem). La démonstration de Michaël Rao montre donc que s'il existe un pavé *einstein*, ce n'est pas un pentagone convexe.

DES QUESTIONS POSÉES PAR LA DÉMONSTRATION

La preuve a déjà été étudiée par plusieurs spécialistes de ce type de questions et une partie des calculs a été refaite par un programme différent écrit par Thomas Hales, dont nous allons reparler plus loin. Il a confirmé les 371 cas de l'étape 2. Le programme utilisé dans l'étape 3 a été simplifié et contrôlé, et il a toujours donné les mêmes résultats. Tout semble donc parfait. Cependant, plusieurs questions restent posées.

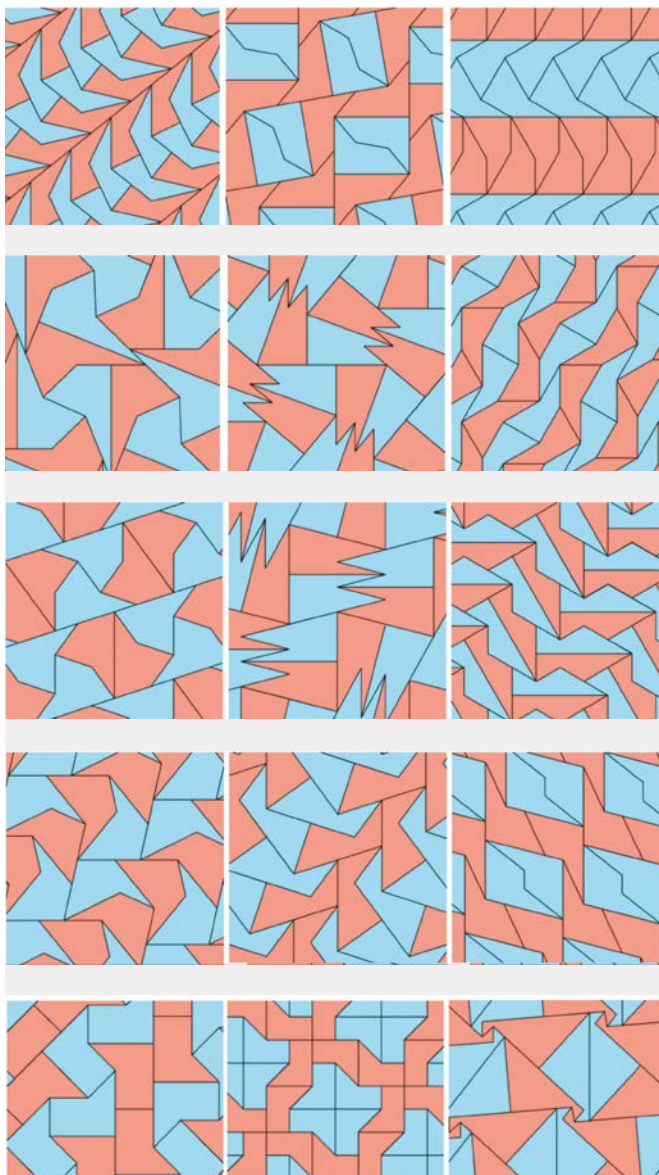
Pourra-t-on simplifier la preuve pour ne plus avoir à utiliser d'ordinateurs? Michaël Rao pense qu'il sera peut-être possible pour l'étape 2 de faire le travail sans ordinateur. Pour l'exploitation des 371 cas un à un, ce chercheur n'exclut pas l'idée qu'une armée de 100 ou 1000 mathématiciens consciencieux puisse mener le calcul et vérifier ce qu'a trouvé la machine. Il juge cependant que ce serait futile et inefficace, puisque, pour ce type de travail, la précision et la fiabilité de la machine sont meilleures que celles des humains. Les calculs sur une machine unique ont duré 40 heures; même si les humains trouveraient sans doute des raccourcis en procédant à la main, il en faudrait beaucoup, et de très déterminés!

Pourrait-on traduire la preuve en une preuve formellement vérifiable? Aujourd'hui, face à une preuve longue et complexe, on tente

3

DES PENTAGONES NON CONVEXES QUI PAVENT LE PLAN

Les images suivantes sont des pavages du plan par des pentagones non convexes. La variété des images suggère que le problème de leur classification est sans doute aussi délicat ou plus que celui résolu par Michaël Rao. Ces images proviennent du site d'un amateur de récréations mathématiques, Jaap Scherphuis (<https://www.jaapsch.net/tilings/>). Il propose bien d'autres exemples.



➤ d'en obtenir une version parfaitement formalisée qu'un ou plusieurs ordinateurs contrôlent en utilisant éventuellement des programmes différents, ce qui procure une garantie presque parfaite de correction. Des logiciels spécialisés nommés assistants de preuve, dont COQ de l'Inria, aident à l'écriture de ces preuves formelles. La méthode des preuves formelles est utilisée pour certifier des circuits et des programmes importants, par exemple en aéronautique. Ici, la mise au point d'une telle preuve permettrait de valider non seulement la partie calculatoire de la démonstration de Michaël Rao, mais aussi sa partie «humaine». Les programmes utilisés par le mathématicien ont été écrits dans le langage C++ et ont une longueur d'environ 5000 lignes. Assurer leur totale exactitude ne sera pas une mince affaire.

Le résultat de Michaël Rao concerne les pentagones convexes. Il est remarquable qu'on ne connaisse pas aujourd'hui de classification analogue pour les pentagones non convexes qui pavent le plan (voir l'encadré 3 pour des exemples). Le problème, d'énoncé simple, semble d'une grande difficulté. Les idées et méthodes de la démonstration de Michaël Rao pourront-elles

faire avancer cette version généralisée de la classification des pentagones pavant le plan?

À cette question, Michaël Rao répond: «La plupart des méthodes que j'ai utilisées peuvent être adaptées aux polygones à n côtés (pour un n fixé), et pas forcément convexes.» Il ajoute cependant: «Je ne me prononcerai pas sur la question d'une classification complète pour les polygones (pas nécessairement convexes) à n côtés (pour un n fixé). Il se pourrait qu'il y ait des comportements bizarres, et qu'on ait un nombre infini de types (conditions sur les angles et les côtés), alors qu'on a un nombre fini de familles (conditions sur les angles uniquement).» Il précise aussi qu'au départ, il s'intéressait au fameux problème de l'*einstein* et que ce n'est que dans un second temps, quand la quinzième forme a été découverte en 2015, qu'il a compris que la preuve de la classification complète des pentagones convexes pavant le plan était à sa portée. Il va continuer à travailler sur ces questions de pavages... sans doute en espérant être celui qui trouve en premier un *einstein*, ou qui montre qu'il n'en existe pas.

AUTRES PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LES PENTAGONES

Parfois, un pentagone ne peut pas paver le plan. C'est ce qu'on démontre facilement pour le pentagone régulier, qui a 5 côtés égaux et 5 angles égaux. Reste alors à savoir comment placer un tel pentagone de manière optimale dans le plan, c'est-à-dire avec une densité aussi élevée que possible. Remarquons que ce problème de densité optimale est le plus simple qui soit non trivial pour les polygones réguliers. On sait en effet répondre à la question de la densité maximale pour les triangles équilatéraux, pour les carrés et même pour les hexagones réguliers... puisqu'ils pavent parfaitement le plan!

La figure ci-contre montre une façon de disposer des pentagones réguliers sur un plan qui semble assez bonne. Sa densité est de:

$$(5 - \sqrt{5})/3 \approx 0,921311.$$

Autrement dit, la partie du plan non recouverte est inférieure à 8 % de la surface.

Est-ce la meilleure façon de disposer les pentagones? Ne peut-on pas les serrer les uns contre les autres encore mieux? L'affirmation que cette disposition est la plus dense possible constitue la «conjecture pentagonale de Henley». Elle est restée non résolue jusqu'en 2016. Elle n'est pas simple du tout, car les rangements possibles sont nombreux et délicats à comparer si l'on veut être certain de ne laisser échapper aucune éventualité. Les dispositions optimales pourraient être très complexes et, par exemple, ne pas être périodiques. Cela se produit en effet pour d'autres problèmes du même type: quand on cherche la disposition de densité optimale pour deux pavés de Penrose, la solution est un pavage non périodique.

4 LE PAVAGE OPTIMAL PAR UN PENTAGONE RÉGULIER

Disposer des pentagones réguliers identiques de façon que la surface non recouverte soit aussi réduite que possible est loin d'être simple. Que la disposition représentée ci-dessous soit la meilleure est vrai, mais il aura fallu attendre 2016 pour le démontrer. La preuve s'étale sur un article de 60 pages, mais elle a aussi nécessité l'utilisation de plusieurs programmes informatiques.

