

R

ENDEZ-VOUS

P.74 Logique & calcul
 P.80 Art & science
 P.82 Idées de physique
 P.86 Science & fiction
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

TRIVIAL, MAIS PUISSANT: LE PRINCIPE DES TIROIRS

Le «principe des tiroirs» est une évidence. Pourtant, depuis son introduction en théorie des nombres par Dirichlet, au XIX^e siècle, il s'est révélé être un levier de raisonnement d'une déconcertante efficacité.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)

Une vérité totalement évidente peut-elle être utile? Il semble que oui. Le principe des tiroirs, *pigeonhole principle* en anglais, ne fait qu'affirmer une vérité générale, simple et indubitable. Nous allons voir que, pourtant, s'appuyer sur lui produit d'intéressants et puissants résultats.

Le principe des tiroirs

Soit un meuble comportant n tiroirs dans lequel sont rangés m objets. Si $m > n$, alors au moins l'un des tiroirs contient deux objets ou plus.

Ce principe a été utilisé dans deux publications de 1842 du mathématicien allemand Johann Dirichlet qui, à ce moment-là, ne le nommait pas. Dans des publications ultérieures, il utilisera le mot *Schubfachprinzip* («principe des tiroirs» en allemand). Il est cependant difficile de savoir qui a vraiment été le premier à utiliser ce principe pour formuler un raisonnement mathématique. Il a très bien pu être découvert ou mis en œuvre sans même être explicité à n'importe quel instant depuis que les mathématiques existent.

Dans une étude historique publiée en 2014, Benoît Rittaud, de l'université Paris-13, et Albrecht Heeffer, de l'université de Gand, ont mis en évidence des utilisations du principe deux siècles avant Dirichlet (voir l'encadré 1). Reste que, presque toujours, on rapporte le principe à Dirichlet: on ne prête qu'aux riches. L'utilisation qu'en a fait Dirichlet a produit un résultat remarquable dont personne ne peut dire qu'il est évident.

La célèbre démonstration de Dirichlet est expliquée dans l'encadré 3 avec quelques conséquences et des détails montrant que le résultat est, en un sens, le meilleur possible.

TROIS EXEMPLES

À titre d'illustration de la puissance du principe des tiroirs, nous présentons une série d'exemples le mettant en œuvre, dans un ordre de difficulté croissante.

Résultat 1. Si $k+1$ nombres entiers (notés $n_0, n_1, \dots, n_k$) sont donnés, on peut en trouver deux dont la différence est un multiple de k . En particulier, si quatre nombres a, b, c et d sont donnés, il y en a deux dont la différence est un multiple de 3.

Démonstration. Prenons les nombres un à un et mettons-les dans k tiroirs portant les numéros $0, 1, \dots, k-1$. Pour ranger le nombre x , on calcule le reste de la division de x par k , et ce reste indique le tiroir où le déposer. D'après le principe des tiroirs, deux nombres se retrouveront dans un même tiroir. Puisque ces deux nombres ont le même reste quand on les divise par k , leur différence donne un reste nul quand on la divise par k . Leur différence est ainsi un multiple de k .

Résultat 2. Si l'on se donne 10 entiers quelconques composés de deux chiffres, il existe parmi eux deux sous-ensembles disjoints de nombres ayant la même somme. Par exemple, si l'on se donne $\{23, 35, 44, 61, 68, 70, 71, 82, 83, 95\}$, on trouvera que $\{23, 35, 95\}$ donne la même somme que $\{71, 82\}$: $23+35+95=153=71+82$.

Démonstration. Les sous-ensembles possibles de notre ensemble de 10 entiers sont au nombre de $2^{10}=1024$, car pour constituer un tel sous-ensemble, on opère 10 fois de suite le choix binaire: prendre le nombre ou ne pas le prendre. Quels nombres peut-on atteindre en faisant la somme des nombres de nos sous-ensembles? Un sous-ensemble comporte de 0 à 10 nombres compris entre 10 et 99; la somme



Jean-Paul Delahaye a récemment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).