

des tiroirs contient au moins cinq objets, ou, dit autrement, l'un des cartons comporte au moins cinq prédictions exactes. La conclusion est donc que deux cartons ne permettent rien, mais que trois cartons, bien utilisés, garantissent d'avoir cinq prédictions exactes au moins sur l'un d'eux.

VARIANTE PROBABILISTE

Le hasard uniforme est un moyen d'améliorer sensiblement le nombre de rencontres dans les tiroirs. On imagine qu'on dispose aléatoirement, avec un hasard uniforme, les m objets dans les n tiroirs de notre meuble. Pour opérer le placement au hasard, on utilise par exemple un jeu de n cartes dont on tire une carte pour chaque objet à placer, carte ensuite remise dans le paquet avant le tirage suivant. Bien sûr, si le nombre m d'objets est supérieur au nombre n de tiroirs, la rencontre de deux objets dans un même tiroir est certaine, c'est le principe des tiroirs de base.

Plus intéressant: même s'il y a moins d'objets que de tiroirs ($m < n$), la rencontre se produira assez souvent et bien plus qu'on ne l'imagine *a priori*. Voici l'énoncé du principe probabiliste des tiroirs qui précise cette probabilité.

Principe probabiliste des tiroirs

Quand on range uniformément au hasard m objets dans n tiroirs ($m < n$) d'un meuble, la probabilité que deux objets se retrouvent dans le même tiroir est égale à $1 - n! / [n^m (n - m)!]$, qui vaut à peu près $1 - \exp[-m(m-1)/2n]$.

En effet, il y a n^m tirages possibles puisque m fois de suite, on tire un des n tiroirs. Parmi les n^m tirages possibles, tous équiprobables, le nombre de tirages défavorables (jamais deux objets ne se trouvent dans un même tiroir) est donné par le nombre de suites de m éléments différents pris parmi n . On parle d'arrangements, et on sait que leur nombre est $n! / (n - m)!$. Le résultat s'en déduit.

Le fameux paradoxe des anniversaires est un cas particulier de ce principe probabiliste. On considère 23 élèves d'une même classe; ce sont les m objets à ranger! On demande de trouver la probabilité pour que, en les mettant dans 365 tiroirs correspondant aux 365 jours de l'année et pouvant être leur jour anniversaire de naissance, il y en ait deux dans le même tiroir, c'est-à-dire deux élèves ayant le même jour anniversaire. On a $m=23$ et $n=365$; le calcul fait avec la formule approchée donne: $1 - \exp[-23 \times 22 / (2 \times 365)] = 0,5000017$, ce qui est supérieur à 50 %. Avec la formule exacte, le calcul donne: 0,5072972.

Ainsi, la probabilité pour que deux élèves d'une classe de 23 élèves aient le même jour anniversaire est égale à 50,72 %. Notons que dans le monde réel, cette probabilité est un peu supérieure à ce 50,72 %, parce que les

3

LA DÉMONSTRATION DE DIRICHLET

Même s'il n'en était pas l'inventeur, Dirichlet fut le premier mathématicien à avoir compris la force du principe des tiroirs et à l'avoir utilisé pour démontrer des affirmations intéressantes.

Il s'en servit notamment pour établir le résultat suivant : Pour tout nombre réel x et tout entier donné n , il existe un nombre rationnel p/q (un rapport de deux entiers) avec $q \leq n$, tel que $|x - p/q| < 1/(nq)$.

En langage plus simple : on s'intéresse aux nombres rationnels p/q dont le dénominateur est inférieur ou égal à l'entier n donné, et on affirme que tout nombre réel peut être approché par l'un d'eux, p/q , avec une erreur inférieure à $1/(nq)$.

Démonstration

On ne s'intéresse qu'aux nombres entre 0 et 1, auxquels on se ramène. Pour tout nombre réel y , notons $\{y\}$ sa partie fractionnaire, c'est-à-dire ce qui reste quand on lui enlève sa partie entière. Par exemple, $\{3,14159\} = 0,14159$. On range les $n + 1$ nombres $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{nx\}$ dans les n « tiroirs » constitués des intervalles $[0, 1/n[, [1/n, 2/n[, [2/n, 3/n[, \dots, [(n-1)/n, 1[$ (rappelons que $[a, b[$ désigne l'ensemble des nombres z tels que $a \leq z < b$). D'après le principe des tiroirs, deux de ces $n + 1$ nombres se

retrouvent dans le même tiroir. Il existe donc deux entiers distincts k et h tels que $\{kx\}$ et $\{hx\}$ soient dans le même tiroir. On en déduit : $|\{kx\} - \{hx\}| < 1/n$. En notant p la différence des parties entières de kx et hx , on en déduit que $|(k-h)x - p| < 1/n$. Si l'on pose $q = k - h$, et que l'on divise par q (qui n'est pas nul, car k est différent de h), on obtient : $|x - p/q| < 1/(nq)$. CQFD.

Un corollaire du résultat est que pour tout nombre réel x , il existe une infinité de nombres entiers q tel que $|x - p/q| \leq 1/q^2$ pour un certain entier p . Dans cet énoncé, on ne peut pas remplacer l'exposant 2 par un nombre réel $a > 2$. En effet, tout nombre irrationnel algébrique (non rationnel, mais racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers) comme le nombre $\sqrt{2}$ est un contre-exemple. C'est ce qu'indique le théorème suivant, qui contribua à valoir une médaille Fields à Klaus Roth en 1958 : Si x est irrationnel algébrique et si a est un nombre réel strictement supérieur à 2, alors il n'existe qu'un nombre fini de q tels que $|x - p/q| \leq 1/q^a$ pour un certain entier p (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Roth's_theorem).

