

des tiroirs contient au moins cinq objets, ou, dit autrement, l'un des cartons comporte au moins cinq prédictions exactes. La conclusion est donc que deux cartons ne permettent rien, mais que trois cartons, bien utilisés, garantissent d'avoir cinq prédictions exactes au moins sur l'un d'eux.

VARIANTE PROBABILISTE

Le hasard uniforme est un moyen d'améliorer sensiblement le nombre de rencontres dans les tiroirs. On imagine qu'on dispose aléatoirement, avec un hasard uniforme, les m objets dans les n tiroirs de notre meuble. Pour opérer le placement au hasard, on utilise par exemple un jeu de n cartes dont on tire une carte pour chaque objet à placer, carte ensuite remise dans le paquet avant le tirage suivant. Bien sûr, si le nombre m d'objets est supérieur au nombre n de tiroirs, la rencontre de deux objets dans un même tiroir est certaine, c'est le principe des tiroirs de base.

Plus intéressant : même s'il y a moins d'objets que de tiroirs ($m < n$), la rencontre se produira assez souvent et bien plus qu'on ne l'imagine *a priori*. Voici l'énoncé du principe probabiliste des tiroirs qui précise cette probabilité.

Principe probabiliste des tiroirs

Quand on range uniformément au hasard m objets dans n tiroirs ($m < n$) d'un meuble, la probabilité que deux objets se retrouvent dans le même tiroir est égale à $1 - n! / [n^m (n - m)!]$, qui vaut à peu près $1 - \exp[-m(m-1)/2n]$.

En effet, il y a n^m tirages possibles puisque m fois de suite, on tire un des n tiroirs. Parmi les n^m tirages possibles, tous équiprobables, le nombre de tirages défavorables (jamais deux objets ne se trouvent dans un même tiroir) est donné par le nombre de suites de m éléments différents pris parmi n . On parle d'arrangements, et on sait que leur nombre est $n! / (n - m)!$. Le résultat s'en déduit.

Le fameux paradoxe des anniversaires est un cas particulier de ce principe probabiliste. On considère 23 élèves d'une même classe; ce sont les m objets à ranger! On demande de trouver la probabilité pour que, en les mettant dans 365 tiroirs correspondant aux 365 jours de l'année et pouvant être leur jour anniversaire de naissance, il y en ait deux dans le même tiroir, c'est-à-dire deux élèves ayant le même jour anniversaire. On a $m=23$ et $n=365$; le calcul fait avec la formule approchée donne : $1 - \exp[-23 \times 22 / (2 \times 365)] = 0,5000017$, ce qui est supérieur à 50 %. Avec la formule exacte, le calcul donne : 0,5072972.

Ainsi, la probabilité pour que deux élèves d'une classe de 23 élèves aient le même jour anniversaire est égale à 50,72 %. Notons que dans le monde réel, cette probabilité est un peu supérieure à ce 50,72 %, parce que les

3

LA DÉMONSTRATION DE DIRICHLET

Même s'il n'en était pas l'inventeur, Dirichlet fut le premier mathématicien à avoir compris la force du principe des tiroirs et à l'avoir utilisé pour démontrer des affirmations intéressantes.

Il s'en servit notamment pour établir le résultat suivant : Pour tout nombre réel x et tout entier donné n , il existe un nombre rationnel p/q (un rapport de deux entiers) avec $q \leq n$, tel que $|x - p/q| < 1/(nq)$. En langage plus simple :

on s'intéresse aux nombres rationnels p/q dont le dénominateur est inférieur ou égal à l'entier n donné, et on affirme que tout nombre réel peut être approché par l'un d'eux, p/q , avec une erreur inférieure à $1/(nq)$.

Démonstration

On ne s'intéresse qu'aux nombres entre 0 et 1, auxquels on se ramène. Pour tout nombre réel y , notons $\{y\}$ sa partie fractionnaire, c'est-à-dire ce qui reste quand on lui enlève sa partie entière. Par exemple, $\{3,14159\} = 0,14159$. On range les $n + 1$ nombres $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{nx\}$ dans les n « tiroirs » constitués des intervalles $[0, 1/n[, [1/n, 2/n[, [2/n, 3/n[, \dots, [(n-1)/n, 1[$ (rappelons que $[a, b[$ désigne l'ensemble des nombres z tels que $a \leq z < b$). D'après le principe des tiroirs, deux de ces $n + 1$ nombres se

retrouvent dans le même tiroir. Il existe donc deux entiers distincts k et h tels que $\{kx\}$ et $\{hx\}$ soient dans le même tiroir. On en déduit : $|\{kx\} - \{hx\}| < 1/n$. En notant p la différence des parties entières de kx et hx , on en déduit que $|(k-h)x - p| < 1/n$. Si l'on pose $q = k - h$, et que l'on divise par q (qui n'est pas nul, car k est différent de h), on obtient : $|x - p/q| < 1/(nq)$. CQFD.

Un corollaire du résultat

est que pour tout nombre réel x , il existe une infinité de nombres entiers q tel que $|x - p/q| \leq 1/q^2$ pour un certain entier p . Dans cet énoncé, on ne peut pas remplacer l'exposant 2 par un nombre réel $a > 2$. En effet, tout nombre irrationnel algébrique (non rationnel, mais racine d'une équation polynomiale à coefficients entiers) comme le nombre $\sqrt{2}$ est un contre-exemple. C'est ce qu'indique le théorème suivant, qui contribua à valoir une médaille Fields à Klaus Roth en 1958 : Si x est irrationnel algébrique et si a est un nombre réel strictement supérieur à 2, alors il n'existe qu'un nombre fini de q tels que $|x - p/q| \leq 1/q^a$ pour un certain entier p (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Roth's_theorem).

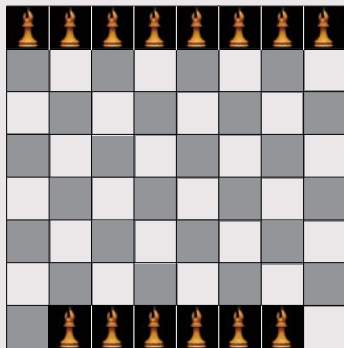


PLUS ON EST DE FOUS...

Combien de fous du jeu d'échecs peut-on placer au plus sur un échiquier 8 x 8 en évitant que deux fous soient en prise ?

La figure de gauche montre que 14 fous peuvent être placés sans qu'aucun ne soit en prise sur un autre.

La figure de droite montre que l'on ne peut pas en placer plus de 14. En effet, les couleurs sur l'échiquier définissent 14 sous-ensembles qui seront pour nous 14 tiroirs. On remarque que les couleurs ont été choisies de telle façon que si on place des fous sur deux cases portant la même couleur, ils sont en prise. Il en résulte que si on plaçait m fous sur l'échiquier avec $m > 14$, d'après le principe des tiroirs utilisé avec 14 tiroirs et m objets, on placerait deux fous dans le même tiroir, donc en prise l'un sur l'autre. Il n'est donc pas possible de placer plus de 14 fous.



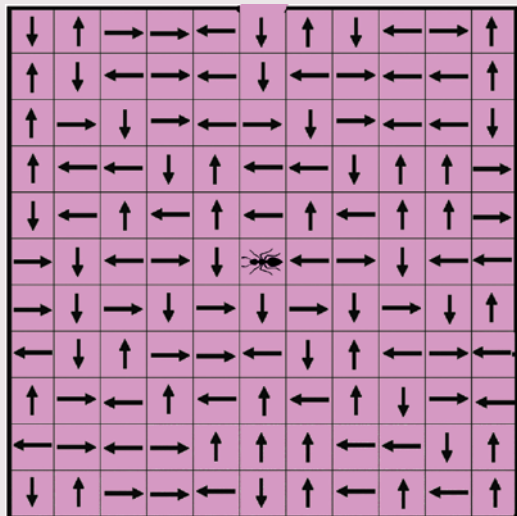
S'ÉCHAPPER DU DAMIER

Sur chaque case d'un damier carré de taille finie, une flèche indique (au hasard) un des quatre points cardinaux. Une fourmi se trouve sur la case centrale. Chaque seconde, elle change de case et va sur la case voisine de sa position en suivant la direction indiquée par la flèche présente sur la case où elle se trouve. Si la fourmi arrive sur la case centrale du mur Nord et que la flèche de la case pointe dans la direction Nord, elle sort. Lorsque la fourmi quitte une case,

la flèche de la case qu'elle vient de quitter tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Il y a un mur sur les côtés Ouest, Est, Sud et Nord (sauf au niveau de la case centrale du mur Nord). Lorsque la fourmi est bloquée par le mur, elle ne change pas de case, mais la flèche tourne quand même de 90°.

Nous allons montrer que la fourmi finit toujours par trouver la sortie.

Supposons que la fourmi ne quitte jamais le damier. D'après le principe des tiroirs fini/infini, il existe au moins une case où elle passe une infinité de fois (les tiroirs sont les cases, et les objets qu'on y dépose sont les numéros des instants où la fourmi s'y trouve). Comme elle se trouve sur cette case une infinité de fois et qu'elle fait tourner la flèche à chaque passage, elle passe aussi une infinité de fois par chacune de ses voisines. Elle passe donc, de proche en proche, une infinité de fois par chacune des cases. La quatrième fois au plus où elle se trouve sur la case libératrice, la flèche lui indiquera le Nord. C'est contraire à notre hypothèse de départ. La contradiction trouvée prouve qu'il est impossible que la fourmi ne quitte pas le damier.



naissances ne sont pas uniformément réparties dans l'année, ce qui augmente la probabilité de jours anniversaires communs... et surtout parce que la présence de jumeaux dans une classe, quand elle se produit, fait passer la probabilité calculée à 100 %.

Une autre application du principe probabiliste des tiroirs est amusante. Les humains ont au plus 200 000 cheveux sur la tête. On est donc certain, d'après le principe des tiroirs, que, dans une ville comptant 200 001 habitants ou plus, deux personnes ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête. Plus surprenante est la probabilité que cela se produise dans un gros village de 1 000 ou 2 000 habitants. Les calculs avec la formule approchée donnent, pour $m=1 000$ habitants :

$1 - \exp[-1 000 \times 999 / (2 \times 200 000)] = 0,9177095$, soit une probabilité de 91,77 %, et pour $m=2 000$ habitants :

$1 - \exp[-2 000 \times 1 999 / (2 \times 200 000)] = 0,9999543725$, soit une probabilité de 99,995 %.

Dans un village de 2 000 personnes, il est donc quasiment certain que deux personnes ont, à l'unité près, le même nombre de cheveux !

DES VERSIONS INFINIES DU PRINCIPE DES TIROIRS

Une chose vraie dans le fini a généralement un énoncé correspondant dans l'infini. C'est le cas pour le principe des tiroirs.

Principe des tiroirs fini/infini

Quand on range une infinité d'objets dans un nombre fini de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité d'objets.

Une application de ce principe porte sur les décimales des nombres réels. Parmi les séquences de chiffres décimaux consécutifs de longueur 1 million (il y en a $10^{1 000 000}$), l'une d'elles se retrouve présente une infinité de fois dans les décimales de π ... et c'est vrai en changeant la longueur et en prenant n'importe quel nombre réel à la place de π .

La démonstration est simple. On parcourt les décimales par paquets de 1 million : paquet P_1 commençant à la première décimale, paquet P_2 commençant à la deuxième décimale, etc. Puis on range chaque entier n dans le tiroir étiqueté par la séquence de décimales P_n . D'après le principe des tiroirs fini/infini, comme il n'y a que $10^{1 000 000}$ tiroirs (il n'y a que $10^{1 000 000}$ séquences distinctes) et qu'on y range tous les entiers, l'un des tiroirs contient une infinité de nombres. La séquence de 1 million de chiffres écrite sur ce tiroir est donc présente une infinité de fois dans les décimales de π .

À vrai dire, on conjecture que « toute séquence finie de chiffres, quelle que soit sa longueur, est présente une infinité de fois dans les décimales de π » ; mais contrairement à