

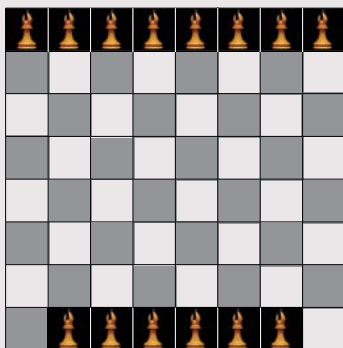
PLUS ON EST DE FOUS...

4

Combien de fous du jeu d'échecs peut-on placer au plus sur un échiquier 8×8 en évitant que deux fous soient en prise ?

La figure de gauche montre que 14 fous peuvent être placés sans qu'aucun ne soit en prise sur un autre.

La figure de droite montre que l'on ne peut pas en placer plus de 14. En effet, les couleurs sur l'échiquier définissent 14 sous-ensembles qui seront pour nous 14 tiroirs. On remarque que les couleurs ont été choisies de telle façon que si on place des fous sur deux cases portant la même couleur, ils sont en prise. Il en résulte que si on plaçait m fous sur l'échiquier avec $m > 14$, d'après le principe des tiroirs utilisé avec 14 tiroirs et m objets, on placerait deux fous dans le même tiroir, donc en prise l'un sur l'autre. Il n'est donc pas possible de placer plus de 14 fous.



S'ÉCHAPPER DU DAMIER

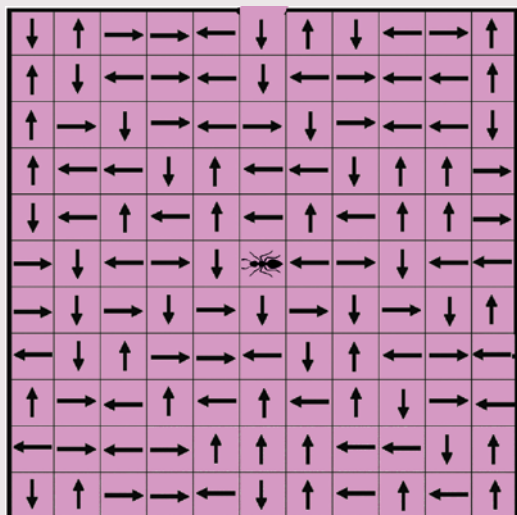
5

Sur chaque case d'un damier carré de taille finie, une flèche indique (au hasard) un des quatre points cardinaux. Une fourmi se trouve sur la case centrale. Chaque seconde, elle change de case et va sur la case voisine de sa position en suivant la direction indiquée par la flèche présente sur la case où elle se trouve. Si la fourmi arrive sur la case centrale du mur Nord et que la flèche de la case pointe dans la direction Nord, elle sort. Lorsque la fourmi quitte une case,

la flèche de la case qu'elle vient de quitter tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Il y a un mur sur les côtés Ouest, Est, Sud et Nord (sauf au niveau de la case centrale du mur Nord). Lorsque la fourmi est bloquée par le mur, elle ne change pas de case, mais la flèche tourne quand même de 90° .

Nous allons montrer que la fourmi finit toujours par trouver la sortie.

Supposons que la fourmi ne quitte jamais le damier. D'après le principe des tiroirs fini/infini, il existe au moins une case où elle passe une infinité de fois (les tiroirs sont les cases, et les objets qu'on y dépose sont les numéros des instants où la fourmi s'y trouve). Comme elle se trouve sur cette case une infinité de fois et qu'elle fait tourner la flèche à chaque passage, elle passe aussi une infinité de fois par chacune de ses voisines. Elle passe donc, de proche en proche, une infinité de fois par chacune des cases. La quatrième fois au plus où elle se trouve sur la case libératrice, la flèche lui indiquera le Nord. C'est contraire à notre hypothèse de départ. La contradiction trouvée prouve qu'il est impossible que la fourmi ne quitte pas le damier.



> naissances ne sont pas uniformément réparties dans l'année, ce qui augmente la probabilité de jours anniversaires communs... et surtout parce que la présence de jumeaux dans une classe, quand elle se produit, fait passer la probabilité calculée à 100 %.

Une autre application du principe probabiliste des tiroirs est amusante. Les humains ont au plus 200 000 cheveux sur la tête. On est donc certain, d'après le principe des tiroirs, que, dans une ville comptant 200 001 habitants ou plus, deux personnes ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête. Plus surprenante est la probabilité que cela se produise dans un gros village de 1 000 ou 2 000 habitants. Les calculs avec la formule approchée donnent, pour $m=1000$ habitants:

$1 - \exp[-1000 \times 999 / (2 \times 200\,000)] = 0,9177095$, soit une probabilité de 91,77 %, et pour $m=2000$ habitants:

$1 - \exp[-2000 \times 1999 / (2 \times 200\,000)] = 0,9999543725$, soit une probabilité de 99,995 %.

Dans un village de 2 000 personnes, il est donc quasiment certain que deux personnes ont, à l'unité près, le même nombre de cheveux!

DES VERSIONS INFINIES DU PRINCIPE DES TIROIRS

Une chose vraie dans le fini a généralement un énoncé correspondant dans l'infini. C'est le cas pour le principe des tiroirs.

Principe des tiroirs fini/infini

Quand on range une infinité d'objets dans un nombre fini de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité d'objets.

Une application de ce principe porte sur les décimales des nombres réels. Parmi les séquences de chiffres décimaux consécutifs de longueur 1 million (il y en a $10^{1\,000\,000}$), l'une d'elles se retrouve présente une infinité de fois dans les décimales de π ... et c'est vrai en changeant la longueur et en prenant n'importe quel nombre réel à la place de π .

La démonstration est simple. On parcourt les décimales par paquets de 1 million: paquet P_1 commençant à la première décimale, paquet P_2 commençant à la deuxième décimale, etc. Puis on range chaque entier n dans le tiroir étiqueté par la séquence de décimales P_n . D'après le principe des tiroirs fini/infini, comme il n'y a que $10^{1\,000\,000}$ tiroirs (il n'y a que $10^{1\,000\,000}$ séquences distinctes) et qu'on y range tous les entiers, l'un des tiroirs contient une infinité de nombres. La séquence de 1 million de chiffres écrite sur ce tiroir est donc présente une infinité de fois dans les décimales de π .

À vrai dire, on conjecture que «toute séquence finie de chiffres, quelle que soit sa longueur, est présente une infinité de fois dans les décimales de π »; mais contrairement à

6

Un champion souhaite organiser ses séances d'entraînement pour les 30 prochains jours. Il s'entraîne par heures entières et veut s'entraîner 45 fois (donc 45 heures). Il veut s'entraîner au moins une heure par jour. Montrer que nécessairement, dans le programme qu'il se fixe, il y a une série de jours consécutifs où il s'entraînera exactement 14 heures.

Démonstration

Considérons le total des heures qu'il aura fait au bout d'une journée, deux journées, etc. Cela donne 30 nombres entiers $S_1 < S_2 < \dots < S_{30} = 45$. On veut démontrer qu'il existe i et j tels que $S_i + 14 = S_j$. Considérons les inégalités écrites au-dessus

en ajoutant 14 à chaque nombre. On a : $S_1 + 14 < S_2 + 14 < \dots < S_{30} + 14 = 45 + 14 = 59$. Les 60 nombres entiers $S_1, S_2, \dots, S_{30}$ et $S_1 + 14, S_2 + 14, \dots, S_{30} + 14$ sont tous compris entre 1 et 59. D'après le principe des tiroirs (ici 59 tiroirs, 60 objets), deux de ces nombres, notons-les X et Y , sont égaux. Les nombres X et Y ne peuvent pas être tous les deux parmi les 30 premiers à cause des inégalités strictes, ni tous les deux parmi les 30 derniers. Il y en a donc un parmi les 30 premiers, disons S_i , et un autre parmi les 30 derniers, disons $S_j + 14$. Nous avons trouvé S_i et S_j tels que $S_i + 14 = S_j$. C'est ce que nous voulions. Remarquons que le raisonnement marcherait encore en remplaçant 14 par 13 ou 12, ou 11... ou 1.

l'affirmation tirée du principe des tiroirs, cet énoncé plus précis reste une hypothèse.

Le principe des tiroirs fini/infini se généralise en considérant l'algèbre des cardinaux transfinis. Indiquons seulement la version de cette généralisation concernant les ensembles infinis dénombrables, ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance un à un avec les nombres entiers, et les ensembles infinis non dénombrables, trop gros pour qu'une telle correspondance existe.

Principe des tiroirs dénombrable/non dénombrable

Quand on range une infinité non dénombrable d'objets dans un meuble contenant une infinité dénombrable de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité non dénombrable d'objets.

Application. Si E est un sous-ensemble non dénombrable du plan et qu'un pavage du plan est donné (par exemple par des carrés) alors l'un des pavés contient une infinité non dénombrable d'éléments de E . On répartit les points dans des tiroirs correspondant aux pavés qui constituent une infinité dénombrable. Parfois, un point de E appartient à plusieurs pavés (car les bords des pavés sont communs); on le place alors au hasard dans le tiroir associé à l'un des pavés concernés. Quand tous les points sont placés, on applique le principe des tiroirs: l'un des tiroirs contient donc une infinité non dénombrable d'éléments, et donc l'un des pavés contient une infinité non dénombrable de points de E .

Le principe des tiroirs fini/infini est important en logique et Terence Tao, célèbre mathématicien australo-américain lauréat d'une médaille Fields en 2006, a proposé un axiome qui exprime ce principe dans un langage logique élémentaire. Cet axiome est aujourd'hui discuté et on étudie sa force (voir la bibliographie). Les travaux autour de ces questions constituent une indication indirecte que les principes des tiroirs sont des

énoncés singuliers exprimant de manière concise des affirmations logiques puissantes... malgré leur apparente évidence.

Ce contenu logique réellement intéressant du principe des tiroirs et de ses variantes est d'ailleurs confirmé par d'autres travaux menés en démonstration automatique à propos d'une méthode de calcul logique dénommée *résolution*. On étudie la transcription en logique propositionnelle de l'affirmation: si m objets sont mis dans n tiroirs et que $m > n$, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets. On essaie de voir quelles sont les démonstrations les plus courtes possible de la formule. On découvre qu'elles sont toutes assez longues, ce qui confirme que, même si elles nous apparaissent aller de soi, les affirmations tirées du principe des tiroirs quand on fait varier n et m ne résultent pas sans efforts des vérités logiques élémentaires adoptées comme axiomes.

UN PRINCIPE FAUX EN MÉCANIQUE QUANTIQUE?

Une dernière preuve que ces principes ne sont pas uniquement des banalités vient d'être proposée par Yakir Aharonov, de l'université de Tel Aviv, et des collègues. Leur article paru en 2016 dans la revue de l'Académie des sciences des États-Unis affirme établir que la forme la plus élémentaire du principe des tiroirs, «Si trois objets sont placés dans deux tiroirs, alors l'un des tiroirs contient deux objets», est fausse en mécanique quantique.

Si comme moi vous avez du mal à comprendre l'article (voir la bibliographie), qui a provoqué quelques réactions critiques, et à savoir ce que peut signifier qu'en mécanique quantique le principe des tiroirs soit faux, ce n'est pas très étonnant. Après tout, le grand physicien américain Richard Feynman avait lui-même déclaré que «personne ne comprend la mécanique quantique»! ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Aharonov et al., **Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations**, *PNAS*, vol. 113(3), pp. 532-535, 2016.

B. Rittaud et A. Heeffer, **The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 36, pp. 27-29, 2014.

O. Beyersdorff et al., **A lower bound for the pigeonhole principle in tree-like resolution by asymmetric Prover-Delayer games**, *Information Processing Letters*, vol. 110(23), pp. 1074-1077, 2010.

J. Gaspar et U. Kohlenbach, **On Tao's "finitary" infinite pigeonhole principle**, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 75(1), pp. 355-371, 2010.

P. G. L. Dirichlet, **Recherches sur les formes quadratiques à coefficients complexes**, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 24, pp. 291-371, 1842.