

6

Un champion souhaite organiser ses séances d'entraînement pour les 30 prochains jours. Il s'entraîne par heures entières et veut s'entraîner 45 fois (donc 45 heures). Il veut s'entraîner au moins une heure par jour. Montrer que nécessairement, dans le programme qu'il se fixe, il y a une série de jours consécutifs où il s'entraînera exactement 14 heures.

Démonstration
Considérons le total des heures qu'il aura fait au bout d'une journée, deux journées, etc. Cela donne 30 nombres entiers $S_1 < S_2 < \dots < S_{30} = 45$. On veut démontrer qu'il existe i et j tels que $S_i + 14 = S_j$. Considérons les inégalités écrites au-dessus

en ajoutant 14 à chaque nombre. On a :
 $S_1 + 14 < S_2 + 14 < \dots < S_{30} + 14 = 45 + 14 = 59$.
Les 60 nombres entiers $S_1, S_2, \dots, S_{30}$ et $S_1 + 14, S_2 + 14, \dots, S_{30} + 14$ sont tous compris entre 1 et 59. D'après le principe des tiroirs (ici 59 tiroirs, 60 objets), deux de ces nombres, notons-les X et Y , sont égaux. Les nombres X et Y ne peuvent pas être tous les deux parmi les 30 premiers à cause des inégalités strictes, ni tous les deux parmi les 30 derniers. Il y en a donc un parmi les 30 premiers, disons S_i , et un autre parmi les 30 derniers, disons $S_j + 14$. Nous avons trouvé S_i et S_j tels que $S_i + 14 = S_j$. C'est ce que nous voulions. Remarquons que le raisonnement marcherait encore en remplaçant 14 par 13 ou 12, ou 11... ou 1.

l'affirmation tirée du principe des tiroirs, cet énoncé plus précis reste une hypothèse.

Le principe des tiroirs fini/infini se généralise en considérant l'algèbre des cardinaux transfinis. Indiquons seulement la version de cette généralisation concernant les ensembles infinis dénombrables, ensembles dont les éléments peuvent être mis en correspondance un à un avec les nombres entiers, et les ensembles infinis non dénombrables, trop gros pour qu'une telle correspondance existe.

Principe des tiroirs dénombrable/non dénombrable

Quand on range une infinité non dénombrable d'objets dans un meuble contenant une infinité dénombrable de tiroirs, l'un des tiroirs contient une infinité non dénombrable d'objets.

Application. Si E est un sous-ensemble non dénombrable du plan et qu'un pavage du plan est donné (par exemple par des carrés) alors l'un des pavés contient une infinité non dénombrable d'éléments de E . On répartit les points dans des tiroirs correspondant aux pavés qui constituent une infinité dénombrable. Parfois, un point de E appartient à plusieurs pavés (car les bords des pavés sont communs); on le place alors au hasard dans le tiroir associé à l'un des pavés concernés. Quand tous les points sont placés, on applique le principe des tiroirs: l'un des tiroirs contient donc une infinité non dénombrable d'éléments, et donc l'un des pavés contient une infinité non dénombrable de points de E .

Le principe des tiroirs fini/infini est important en logique et Terence Tao, célèbre mathématicien australo-américain lauréat d'une médaille Fields en 2006, a proposé un axiome qui exprime ce principe dans un langage logique élémentaire. Cet axiome est aujourd'hui discuté et on étudie sa force (voir la bibliographie). Les travaux autour de ces questions constituent une indication indirecte que les principes des tiroirs sont des

énoncés singuliers exprimant de manière concise des affirmations logiques puissantes... malgré leur apparente évidence.

Ce contenu logique réellement intéressant du principe des tiroirs et de ses variantes est d'ailleurs confirmé par d'autres travaux menés en démonstration automatique à propos d'une méthode de calcul logique dénommée *résolution*. On étudie la transcription en logique propositionnelle de l'affirmation: si m objets sont mis dans n tiroirs et que $m > n$, alors l'un des tiroirs contient au moins deux objets. On essaie de voir quelles sont les démonstrations les plus courtes possible de la formule. On découvre qu'elles sont toutes assez longues, ce qui confirme que, même si elles nous apparaissent aller de soi, les affirmations tirées du principe des tiroirs quand on fait varier n et m ne résultent pas sans efforts des vérités logiques élémentaires adoptées comme axiomes.

UN PRINCIPE FAUX EN MÉCANIQUE QUANTIQUE?

Une dernière preuve que ces principes ne sont pas uniquement des banalités vient d'être proposée par Yakir Aharonov, de l'université de Tel Aviv, et des collègues. Leur article paru en 2016 dans la revue de l'Académie des sciences des États-Unis affirme établir que la forme la plus élémentaire du principe des tiroirs, «Si trois objets sont placés dans deux tiroirs, alors l'un des tiroirs contient deux objets», est fautive en mécanique quantique.

Si comme moi vous avez du mal à comprendre l'article (voir la bibliographie), qui a provoqué quelques réactions critiques, et à savoir ce que peut signifier qu'en mécanique quantique le principe des tiroirs soit faux, ce n'est pas très étonnant. Après tout, le grand physicien américain Richard Feynman avait lui-même déclaré que «personne ne comprend la mécanique quantique»! ■

BIBLIOGRAPHIE

Y. Aharonov et al., **Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations**, PNAS, vol. 113(3), pp. 532-535, 2016.

B. Rittaud et A. Heeffer, **The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet**, The Mathematical Intelligencer, vol. 36, pp. 27-29, 2014.

O. Beyersdorff et al., **A lower bound for the pigeonhole principle in tree-like resolution by asymmetric Prover-Delayer games**, Information Processing Letters, vol. 110(23), pp. 1074-1077, 2010.

J. Gaspar et U. Kohlenbach, **On Tao's "finitary" infinite pigeonhole principle**, The Journal of Symbolic Logic, vol. 75(1), pp. 355-371, 2010.

P. G. L. Dirichlet, **Recherches sur les formes quadratiques à coefficients complexes**, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 24, pp. 291-371, 1842.