

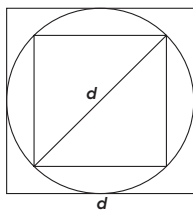
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE SUR TABLETTES D'ARGILE

On attribue la formule reliant l'hypoténuse aux deux autres côtés d'un triangle rectangle à Pythagore, au VI^e siècle avant notre ère. Mais les mathématiciens babyloniens, 1300 ans auparavant, avaient déjà utilisé une version de ce théorème.

Ces derniers savaient aussi calculer de façon approchée une racine carrée, suivant une méthode que nous attribuons à Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle de notre ère). Ainsi, on peut lire sur la tablette d'un apprenti que l'approximation à 5 décimales de $\sqrt{2}$ vaut 1,24.51.10 en système sexagésimal (le système de numération de base 60), c'est-à-dire :

$1 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3}$,
ce qui fait bien, dans le système décimal, 1,41421...

Devant une telle précision, on s'étonne que l'aire d'un cercle (πr^2 où r est le rayon du cercle) ait été calculée par les Mésopotamiens par la formule $3r^2$ plutôt qu'à l'aide d'une valeur approchée de π comme 3,1415. Cela suggère que les mathématiciens mésopotamiens considéraient que cette aire était égale à la valeur moyenne des aires des carrés circonscrit et inscrit.



En effet, tandis que l'aire du carré circonscrit est d^2 , où d est le diamètre du cercle, le carré inscrit a pour aire $d^2/2$; la moyenne de ces deux quantités,



Cette tablette inscrite en cunéiforme, conservée au British Museum, traite de la construction de certaines figures géométriques.

c'est-à-dire $(d^2 + d^2/2)/2$, vaut bien $3d^2/4$, soit $3(d/2)^2$ ou encore $3r^2$.

Les scribes mésopotamiens étaient aussi capables de calculer les aires de figures compliquées. Un exemple impressionnant de ce savoir-faire est fourni par une tablette conservée au British Museum (ci-dessus). Son texte décrit la construction de certaines figures sans indiquer comment les calculer, mais il n'y

soit $1/3$, comme l'approximation babylonienne de $1/\pi$, et par ailleurs 5, c'est-à-dire $5/60 = 1/12$, comme l'approximation babylonienne de $1/(4\pi)$. Or ces facteurs permettent de calculer, à partir de la circonférence C du cercle, son diamètre $d = C/\pi$ et son aire $S = C^2/(4\pi)$.

On trouve aussi mentionnés sur la tablette les charges de travail représentées par certaines tâches, tout à fait comparables aux ordres de grandeur qui nous aident aujourd'hui à estimer des coûts de construction.

Les plus anciennes traces de mathématiques mésopotamiennes sont inscrites en protocunéiforme sur des tablettes de la ville d'Uruk datant du IV^e millénaire avant notre ère. Un scribe y calcula la superficie de champs à partir de rectangles et de quadrilatères irréguliers. Les Mésopotamiens calculaient leurs aires de façon approchée par des produits des valeurs moyennes des longueurs de côtés opposés, exactement comme procéderont les Romains quelque 3000 ans plus tard.

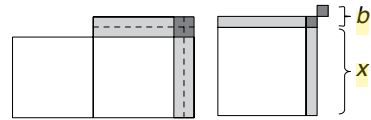
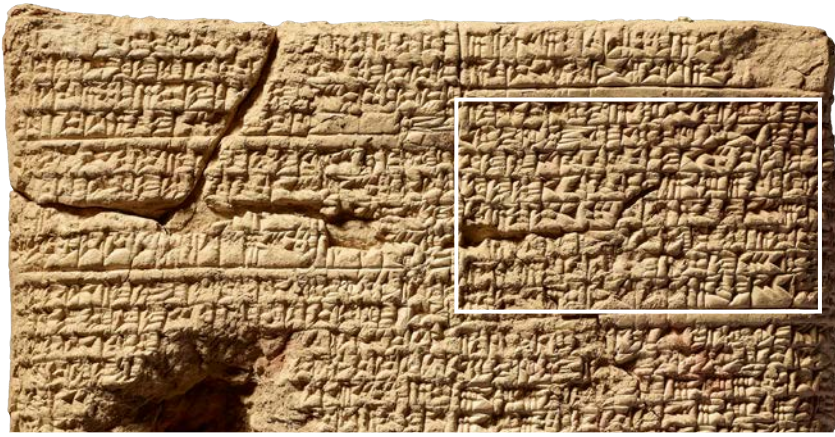
Même les abstractions n'étaient pas étrangères aux mathématiciens de Babylone. Ainsi, sur la tablette reproduite ci-dessus, l'un d'eux s'est servi d'étapes de pensée pour résoudre un système de deux inconnues composé d'une équation du deuxième degré et d'une équation du premier degré. Elle contient la solution complète du système d'équations ($x^2 + y^2 = a$; $y = x + b$) dans le cas concret où

Les plus anciennes traces de mathématiques mésopotamiennes sont sur des tablettes du IV^e millénaire

a aucun doute sur le fait que l'exercice correspondant a bien été résolu.

Dans la pratique quotidienne, les érudits employaient des listes qui avaient à peu près la fonction de nos tables numériques modernes. Ils contenaient toutes sortes de nombres utiles à la géométrie, aux techniques et à l'administration.

On y trouve par exemple des mentions du genre «20: diamètre du cercle» et «5: paramètre du cercle». Il faut ici entendre le chiffre sexagésimal 20/60,



La figure qui en résulte a pour aire $a/2$, c'est-à-dire 650. Chacun des carrés gris foncé qui restent a pour côté $b/2$ (soit, ici, 5) et donc pour aire $(b/2)^2$ (soit, ici, 25).

À l'étape 7, un tel carré est retiré de la nouvelle figure (« Tu déduis (le résultat) 25 de 650 »), par exemple le carré se trouvant à l'extérieur. Il reste donc un carré de longueur $x + b/2$.



Son aire est égale à $650 - 25$, soit 625. À l'étape 8, on en prend la racine carrée. Le résultat (25) est le côté du carré, donc $x + b/2$. Ce résultat intermédiaire doit être écrit deux fois (étape 9), puis subir deux opérations différentes: l'addition de $b/2$ (étape 10) donne $x + b$, donc le côté du grand carré d'origine (étape 11); la soustraction de $b/2$ donne le côté du petit carré d'origine (étape 13).

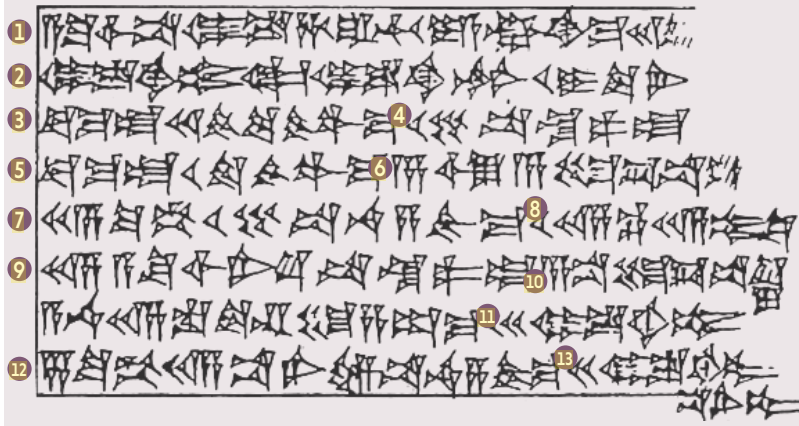
Cet algorithme fonctionne aussi quand on utilise d'autres valeurs que 1300 pour a et 10 pour b . Il est aujourd'hui indiscutable que les mathématiciens babyloniens le savaient. Comme l'avait déjà constaté dans les années 1930 Otto Neugebauer, le pionnier de l'étude des mathématiques décrites sur les tablettes mésopotamiennes, les Mésopotamiens employaient des chiffres concrets pratiquement comme des variables.

Ils ont même résolu des généralisations du problème évoqué ici, où l'on ne cherche pas seulement les côtés de deux carrés, mais ceux de n carrés, dont le côté de chacun est toujours augmenté de b par rapport à celui de son prédécesseur, tandis que l'aire totale de cette série de carrés est prescrite.

HAGAN BRUNKE

H. Brunke, *Überlegungen zu Raumerfassung und Flächenrechnung in Mesopotamien*, eTopoi Journal for Ancient Studies, vol. 4, pp. 1-17, 2015.

J. Høyrup, *L'Algèbre au temps de Babylone. Quand les mathématiques s'écrivaient sur de l'argile*, Vuibert/Adapt-Snes, 2010.



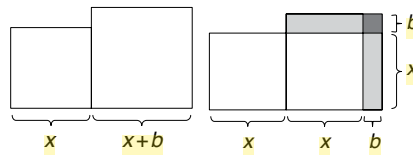
Une série de 13 étapes aboutissant à la résolution du système d'équations ($x^2 + y^2 = 1300$; $y = x + 10$) sont décrites sur une tablette babylonienne conservée au British Museum (en haut, rectangle blanc). Ces étapes sont indiquées sur la reproduction à grande échelle du contenu de ce passage (ci-dessus).

$a = 1300$ et $b = 10$. Dans la traduction qui suit, j'ai un peu complété le texte original et traduit en écriture décimale les nombres.

- 1 J'ai ajouté les aires de deux carrés et le résultat est 1300.
- 2 Le côté de l'un des carrés dépasse celui de l'autre de 10.
- 3 Tu prends la moitié de 1300 (mentionné à l'étape 1).
- 4 Tu écris 650 (le résultat).
- 5 Tu formes les moitiés de 10 (mentionné à l'étape 2).
- 6 Tu multiplies les (résultats) 5 entre eux.
- 7 Tu déduis (le résultat) 25 de 650.
- 8 La racine carrée (du résultat) 625 est 25.
- 9 Tu écris deux fois ces 25.
- 10 Tu ajoutes le 5, que tu as mis au carré (à l'étape 6) à l'un des 25 (mentionné à l'étape 9).
- 11 (Le résultat) 30 est le côté du plus grand carré.
- 12 Tu retires le 5 (que tu as élevé au carré à l'étape 6) du deuxième 25 (mentionné à l'étape 9).

13 (Le résultat) 20 est le côté du plus petit carré.

Cette suite d'étapes conduisant à la solution peut être interprétée ainsi. On a deux carrés, l'un de côté x et l'autre de côté $y = x + b$. Le plus grand carré peut être vu comme le premier que l'on a augmenté d'un «supplément» :



Ce supplément correspond aux deux rectangles gris clair ci-dessus (de largeur b et de hauteur x) et au carré gris foncé de côté b . À l'étape 3, on retire la moitié de l'aire totale (à savoir ici a , c'est-à-dire 1300). Cela peut être réalisé géométriquement en enlevant à l'un des deux carrés blancs (de même taille) la moitié de l'une des bandes gris clair et deux quarts du petit carré gris foncé :

> jour illégalement par des voleurs après la première guerre du Golfe en 1990-1991, puis vendues hors du pays. Elles ont fini par atterrir dans la collection de l'université Cornell, à Ithaca. Au début des années 2000, Rudolf Mayr et David Owen, assyriologues de cette université, ont identifié qu'elles constituaient un corpus, puis les ont publiées en 2007. Nous ignorons où précisément se trouvait le site de Garshana mentionné sur ces tablettes (peut-être près d'Umma) ; il ne s'agissait probablement pas d'une ville, mais d'une localité de plus petite taille, sans doute dépourvue d'un domaine agricole propre.

BASE COMPTABLE : L'ORGE

D'après ces textes, les travailleurs et les scribes participant à la construction recevaient de la bière, du pain et une sorte de gruaux à base de farine de céréales bouillies, qui était enrichie de haricots et de pois chiches. La quantité perçue dépendait du statut et de l'âge de l'employé. Ainsi, les maçons percevaient 1 litre de bière, 1/2 litre de gruaux et 1 litre de pain (le pain aussi était mesuré en volume) par jour, tout comme les scribes qui administraient le chantier. Les manœuvres non qualifiés recevaient 1 litre de bière, mais devaient se contenter de 1/2 litre de pain et 1/3 litre de gruaux par jour. Le même texte mentionne aussi des aides des deux sexes, probablement des enfants, qui recevaient encore moins : 1/3 litre de bière, de pain et de gruaux chacun.

La conversion de tous les coûts en quantités alimentaires afin de pouvoir établir des bilans atteste l'efficacité avec laquelle les scribes géraient le temps de travail. On utilisait en général l'orge comme base comptable. Toutes les entrées et sorties de marchandises étaient traduites en valeurs mesurées dans cette « monnaie unique ». Deux litres d'orge correspondaient ainsi à un litre de blé ; selon la qualité et le type de farine, 1 litre de pain équivalait à 1 ou 2 litres d'orge ; 1 litre de bière équivalait, selon sa teneur, à 1 à 3 litres d'orge.

En 2011, l'un d'entre nous (Hagan Brunke) a découvert que ces conversions prenaient en compte non seulement le coût des matières premières, mais aussi les coûts de production, par exemple les salaires des boulangers et des brasseurs. Le fait que les facteurs de conversion soient restés constants, alors que les prix du marché fluctuaient forcément, permet de s'appuyer sur des textes provenant d'époques très éloignées les unes des autres. Si le pain et la bière utilisés dans les briqueteries et sur les chantiers étaient équivalents en valeur à la même quantité d'orge, il semble que les ouvriers ne recevaient que la qualité la plus simple. La farine d'orge précuite qui servait de base aux gruaux, quant à elle, avait, à volume égal, la valeur d'une fois et demie celle d'un même

volume de grain non travaillé, ce qui montre que l'on tenait compte du travail associé au séchage et à la précuisson.

Au total, les rations journalières d'un maçon ou d'un scribe coûtaient l'équivalent d'environ 2,4 litres d'orge, tandis que le travailleur non qualifié coûtait environ 1,75 litre. Nous n'avons pas encore d'informations comparables quant à l'offre alimentaire dans la briqueterie ; mais si les hommes qui y travaillaient recevaient autant que les maçons, ce qui est plausible, il faut ajouter environ 1,6 litre d'orge par mètre cube de briques aux coûts salariaux susmentionnés.

Des considérations similaires s'appliquent aux autres étapes du travail. De nombreux textes sur l'arpentage mentionnent des carrières d'argile à la lisière des vastes terres agricoles. C'est là, sans doute, que l'on produisait les briques. Pour les transporter jusqu'au chantier de construction, on les chargeait probablement sur des barges circulant sur le vaste réseau de chenaux dont était parcourue la Mésopotamie. Des porteurs acheminaient les matériaux de construction jusqu'à des embarcadères, ou des débarcadères jusqu'aux chantiers.

En 2009, l'orientaliste allemand Wolfgang Heimpel a déterminé l'efficacité de ces travailleurs de force à partir des textes de Garshana. Selon ses calculs, un porteur acheminait en moyenne 20 kilogrammes par jour sur une distance cumulée de 25 kilomètres. Malheureusement, il n'est guère possible de calculer plus précisément le coût de transport, car les distances à parcourir variaient d'un chantier à l'autre. Or elles n'ont jamais été notées. Quoi qu'il en soit, les estimations du coût global mettent en évidence que chaque kilomètre supplémentaire à parcourir avait un impact notable. C'est probablement pourquoi, au début de certains grands projets de construction, on prenait la peine de creuser de nouveaux canaux, que l'on rebouchait ultérieurement. Le coût du terrassement nécessaire valait l'investissement, car les grands projets s'étendaient sur de nombreuses années.

S'agissant de la construction proprement dite, les tablettes cunéiformes fournissent la valeur moyenne de 3 mètres cubes de mur par personne et par jour. Il est peu probable que les maçons effectuaient eux-mêmes les



LE ROI CONSTRUIT UN TEMPLE

Qui est ce porteur glabre et au crâne rasé, un panier de terre sur la tête ? L'inscription en cunéiforme nous apprend que cette figurine de bronze représente le roi Ur-Nammu construisant la « maison des dieux », c'est-à-dire le temple Éanna dans la ville d'Uruk. De tels « clous de fondation » étaient placés dans les fondements des nouveaux temples lors de la cérémonie marquant le début du chantier.