

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LES INDÉCIDABLES ABSOLUS EXISTENT-ILS?

En 1951, Kurt Gödel énonça que soit l'esprit humain n'est pas une machine, soit il existe des énoncés qui lui sont indécidables à jamais, soit les deux à la fois. Le débat ouvert sur cette question est toujours d'actualité.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)

Certaines questions philosophiques sont fondamentales. La nature, mécanique ou non, de l'esprit humain en fait partie. Que des résultats mathématiques contribuent à résoudre cette dernière est surprenant. Pourtant, Kurt Gödel, fin philosophe et génial logicien d'origine autrichienne, a fait avancer la question en 1951 en formulant ce que l'on dénomme la disjonction gödélienne. Cet énoncé indique que l'une au moins des deux affirmations suivantes est vraie :

- soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme, autrement dit l'homme n'est pas une machine.

- soit il existe des indécidables mathématiques absolus.

Expliquons les deux termes de la disjonction avant de présenter l'argument proposé par Gödel pour l'établir et les approfondissements apportés par de récents travaux.

Les mathématiciens ont élaboré des méthodes de raisonnement sûres et vérifiables, que l'on présente sous la forme d'axiomes et de règles de déduction ; ces méthodes leur permettent d'établir toutes les mathématiques connues. L'une des principales méthodes est le système formel de l'arithmétique de Peano, qu'on notera PEANO ; il permet de traiter les nombres entiers et de démontrer, par exemple, qu'il existe une infinité de nombres premiers ou que tout entier positif n est la somme de quatre carrés d'entiers ($n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, où a, b, c et d sont des entiers). D'autres systèmes formels autorisent la manipulation des nombres

réels et en particulier les calculs des décimales du nombre π , ou la résolution des équations différentielles.

Plus puissant, le système habituel de la théorie des ensembles, noté ZFC pour « système de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix », établit qu'il existe une infinité de types d'infinis et permet de concevoir des espaces à n dimensions, des espaces de fonctions, des espaces d'espaces, etc. D'autres systèmes formels, tels ceux évoqués dans un article précédent de cette rubrique à propos d'Alexandre Grothendieck (voir « Quand considère-t-on qu'un théorème est définitivement prouvé? », *Pour la Science* n° 475, mai 2017) sont encore plus puissants.

Cette hiérarchie de systèmes autorise non seulement la manipulation d'objets finis et infinis de plus en plus nombreux et variés, mais donne accès à un florilège de nouvelles démonstrations : ZFC « sait » par exemple plus de choses sur les entiers que PEANO. Cette progression vers des systèmes de plus en plus efficaces se poursuivra sans doute. La question évoquée par le premier terme de la disjonction de Gödel est celle de la nature de cet esprit inventif qui maîtrise un monde mathématique de plus en plus riche : peut-il être réduit à ce que donnerait un algorithme ?

Le second terme de la disjonction se réfère aux indécidables qui, d'après le premier théorème d'incomplétude de Gödel, existent dans tout système formel cohérent (on dit aussi « consistant », terme calqué de l'anglais *consistent*), c'est-à-dire non contradictoire, et assez puissant.



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).