

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

LES INDÉCIDABLES ABSOLUS EXISTENT-ILS?

En 1951, Kurt Gödel énonça que soit l'esprit humain n'est pas une machine, soit il existe des énoncés qui lui sont indécidables à jamais, soit les deux à la fois. Le débat ouvert sur cette question est toujours d'actualité.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Certaines questions philosophiques sont fondamentales. La nature, mécanique ou non, de l'esprit humain en fait partie. Que des résultats mathématiques contribuent à résoudre cette dernière est surprenant. Pourtant, Kurt Gödel, fin philosophe et génial logicien d'origine autrichienne, a fait avancer la question en 1951 en formulant ce que l'on dénomme la disjonction gödélienne. Cet énoncé indique que l'une au moins des deux affirmations suivantes est vraie :

- soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme, autrement dit l'homme n'est pas une machine.
- soit il existe des indécidables mathématiques absolus.

Expliquons les deux termes de la disjonction avant de présenter l'argument proposé par Gödel pour l'établir et les approfondissements apportés par de récents travaux.

Les mathématiciens ont élaboré des méthodes de raisonnement sûres et vérifiables, que l'on présente sous la forme d'axiomes et de règles de déduction ; ces méthodes leur permettent d'établir toutes les mathématiques connues. L'une des principales méthodes est le système formel de l'arithmétique de Peano, qu'on notera PEANO ; il permet de traiter les nombres entiers et de démontrer, par exemple, qu'il existe une infinité de nombres premiers ou que tout entier positif n est la somme de quatre carrés d'entiers ($n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, où a, b, c et d sont des entiers). D'autres systèmes formels autorisent la manipulation des nombres

réels et en particulier les calculs des décimales du nombre π , ou la résolution des équations différentielles.

Plus puissant, le système habituel de la théorie des ensembles, noté ZFC pour « système de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix », établit qu'il existe une infinité de types d'infinis et permet de concevoir des espaces à n dimensions, des espaces de fonctions, des espaces d'espaces, etc. D'autres systèmes formels, tels ceux évoqués dans un article précédent de cette rubrique à propos d'Alexandre Grothendieck (voir « Quand considère-t-on qu'un théorème est définitivement prouvé? », *Pour la Science* n° 475, mai 2017) sont encore plus puissants.

Cette hiérarchie de systèmes autorise non seulement la manipulation d'objets finis et infinis de plus en plus nombreux et variés, mais donne accès à un florilège de nouvelles démonstrations : ZFC « sait » par exemple plus de choses sur les entiers que PEANO. Cette progression vers des systèmes de plus en plus efficaces se poursuivra sans doute. La question évoquée par le premier terme de la disjonction de Gödel est celle de la nature de cet esprit inventif qui maîtrise un monde mathématique de plus en plus riche : peut-il être réduit à ce que donnerait un algorithme ?

Le second terme de la disjonction se réfère aux indécidables qui, d'après le premier théorème d'incomplétude de Gödel, existent dans tout système formel cohérent (on dit aussi « consistant », terme calqué de l'anglais *consistent*), c'est-à-dire non contradictoire, et assez puissant.

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

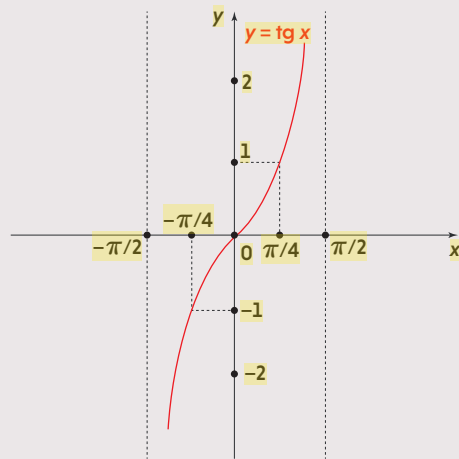
1

L'hypothèse du continu est un bon candidat au titre d'indécidable absolu. Expliquons en quoi elle consiste. Les sous-ensembles infinis de l'ensemble des nombres réels que les mathématiciens rencontrent sont de deux types. Il y a, d'une part, les sous-ensembles dénombrables, c'est-à-dire qui peuvent être mis en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Contrairement à ce qu'on pense au premier abord, l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ est dénombrable : il peut être mis en correspondance un à un avec $\mathbb{N}$. Il suffit de procéder ainsi : $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow -1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow -2, 5 \rightarrow 3, 6 \rightarrow -3, 7 \rightarrow 4, 8 \rightarrow -4$, etc. Il en va de même pour les rationnels positifs (quotients de deux entiers positifs) : on place ces nombres dans un tableau que l'on parcourt en zigzag :

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

En associant les entiers positifs aux étapes du parcours et en sautant ceux déjà rencontrés (comme $2/4$, qui est égal à $1/2$), on définit une correspondance un à un entre les entiers et les rationnels positifs.

L'autre catégorie de sous-ensembles infinis rencontrés en mathématiques est celle des ensembles qu'on sait mettre en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Par exemple, l'intervalle I des nombres réels strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ est mis en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{R}$ par la fonction $x \rightarrow \tan(x)$; à chaque nombre de l'intervalle I correspond un unique nombre réel et tous les réels sont atteints (parce qu'il y a deux asymptotes verticales).



Tous les sous-ensembles infinis de $\mathbb{R}$ qu'on rencontre se mettent ainsi en correspondance un à un soit avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$. Pourtant, on ne sait pas prouver que cela est vraiment le cas pour tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$. Dit un peu différemment, on ignore s'il existe un infini intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu, HC, formulée la première fois par Georg Cantor en 1878, affirme que oui. Kurt Gödel a prouvé en 1938 que les axiomes du système ZFC ne permettent pas de démontrer non-HC, et Paul Cohen a prouvé en 1963 que les axiomes de ZFC ne permettent pas de démontrer HC. En un mot, HC est un indécidable de ZFC. On pourrait donc, sans risque d'introduire de contradiction, ajouter HC ou non-HC aux axiomes. Cependant, les mathématiciens refusent de le faire, car aucune intuition claire ne les guide dans le choix ; opter pour HC ou pour non-HC serait une décision arbitraire.

Cela ne signifie pas que HC soit un indécidable absolu, car, comme l'espérait Gödel, on pourrait trouver un ou des axiomes naturels et évidents à ajouter à ZFC qui, parmi leurs conséquences, auraient HC ou non-HC. Bien qu'un énorme travail ait été fait dans cet objectif, celui-ci n'a pas été atteint à ce jour.

Un indécidable dans le système S est un énoncé E qui, bien que s'exprimant dans le langage de S , n'est pas démontrable dans S , pas plus que sa négation non- E . Le premier théorème d'incomplétude de 1931 établit de façon incontestable que tout système formel S cohérent et assez puissant est sujet à l'incomplétude (c'est-à-dire qu'il y existe des indécidables), et le second théorème d'incomplétude précise que l'énoncé Cohé(S) affirmant que S est cohérent est un indécidable de S .

Les énoncés d'un système donné S qui sont indécidables ne le sont pas nécessairement dans un autre système S' . On connaît ainsi des énoncés d'arithmétique qui sont indécidables dans PEANO et qui ne le sont pas dans la

théorie ZFC des ensembles : les indécidables évoqués par les théorèmes de Gödel dépendent du système formel envisagé.

INDÉCIDABLES RELATIFS OU ABSOLUS ?

Dans un certain sens, il n'existe pas d'indécidable absolu : si E est un indécidable d'un système cohérent S , en ajoutant à S l'axiome E on obtient le système S' qui est encore cohérent, mais où E n'est plus indécidable ! Ce n'est bien sûr pas dans ce sens que Gödel envisage les indécidables absolus dans sa disjonction. Même si, par jeu, on envisage le système S' , il n'est pas vrai que les mathématiciens envisageront sérieusement ce qu'indique S' du monde mathématique ; >