

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

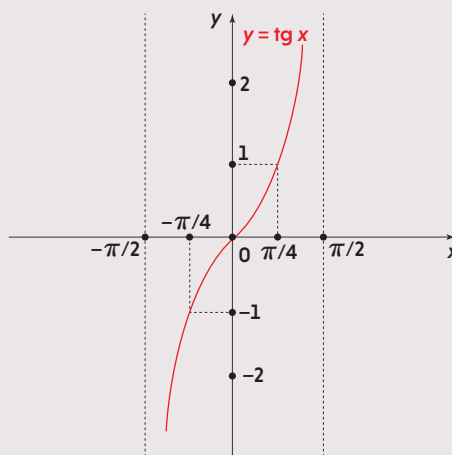
1

L'hypothèse du continu est un bon candidat au titre d'indécidable absolu. Expliquons en quoi elle consiste. Les sous-ensembles infinis de l'ensemble des nombres réels que les mathématiciens rencontrent sont de deux types. Il y a, d'une part, les sous-ensembles dénombrables, c'est-à-dire qui peuvent être mis en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Contrairement à ce qu'on pense au premier abord, l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ est dénombrable : il peut être mis en correspondance un à un avec $\mathbb{N}$. Il suffit de procéder ainsi : $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow -1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow -2, 5 \rightarrow 3, 6 \rightarrow -3, 7 \rightarrow 4, 8 \rightarrow -4$, etc. Il en va de même pour les rationnels positifs (quotients de deux entiers positifs) : on place ces nombres dans un tableau que l'on parcourt en zigzag :

$\frac{1}{1}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{5}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{6}$	$\dots$
$\frac{2}{1}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{2}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{3}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{4}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{5}$	$\nwarrow$	$\frac{2}{6}$	$\dots$
$\frac{3}{1}$	$\swarrow$	$\frac{3}{2}$	$\swarrow$	$\frac{3}{3}$	$\swarrow$	$\frac{3}{4}$	$\swarrow$	$\frac{3}{5}$	$\swarrow$	$\frac{3}{6}$	$\dots$
$\frac{4}{1}$	$\searrow$	$\frac{4}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{4}{4}$	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	$\frac{4}{6}$	$\dots$
$\frac{5}{1}$	$\swarrow$	$\frac{5}{2}$	$\swarrow$	$\frac{5}{3}$	$\swarrow$	$\frac{5}{4}$	$\swarrow$	$\frac{5}{5}$	$\swarrow$	$\frac{5}{6}$	$\dots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

En associant les entiers positifs aux étapes du parcours et en sautant ceux déjà rencontrés (comme $2/4$, qui est égal à $1/2$), on définit une correspondance un à un entre les entiers et les rationnels positifs.

L'autre catégorie de sous-ensembles infinis rencontrés en mathématiques est celle des ensembles qu'on sait mettre en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Par exemple, l'intervalle I des nombres réels strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ est mis en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathbb{R}$ par la fonction $x \rightarrow \tan(x)$; à chaque nombre de l'intervalle I correspond un unique nombre réel et tous les réels sont atteints (parce qu'il y a deux asymptotes verticales).



Tous les sous-ensembles infinis de $\mathbb{R}$ qu'on rencontre se mettent ainsi en correspondance un à un soit avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$. Pourtant, on ne sait pas prouver que cela est vraiment le cas pour tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$. Dit un peu différemment, on ignore s'il existe un infini intermédiaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu, HC, formulée la première fois par Georg Cantor en 1878, affirme que oui. Kurt Gödel a prouvé en 1938 que les axiomes du système ZFC ne permettent pas de démontrer non-HC, et Paul Cohen a prouvé en 1963 que les axiomes de ZFC ne permettent pas de démontrer HC. En un mot, HC est un indécidable de ZFC. On pourrait donc, sans risque d'introduire de contradiction, ajouter HC ou non-HC aux axiomes. Cependant, les mathématiciens refusent de le faire, car aucune intuition claire ne les guide dans le choix ; opter pour HC ou pour non-HC serait une décision arbitraire.

Cela ne signifie pas que HC soit un indécidable absolu, car, comme l'espérait Gödel, on pourrait trouver un ou des axiomes naturels et évidents à ajouter à ZFC qui, parmi leurs conséquences, auraient HC ou non-HC. Bien qu'un énorme travail ait été fait dans cet objectif, celui-ci n'a pas été atteint à ce jour.

Un indécidable dans le système S est un énoncé E qui, bien que s'exprimant dans le langage de S , n'est pas démontrable dans S , pas plus que sa négation non- E . Le premier théorème d'incomplétude de 1931 établit de façon incontestable que tout système formel S cohérent et assez puissant est sujet à l'incomplétude (c'est-à-dire qu'il y existe des indécidables), et le second théorème d'incomplétude précise que l'énoncé Cohé(S) affirmant que S est cohérent est un indécidable de S .

Les énoncés d'un système donné S qui sont indécidables ne le sont pas nécessairement dans un autre système S' . On connaît ainsi des énoncés d'arithmétique qui sont indécidables dans PEANO et qui ne le sont pas dans la

théorie ZFC des ensembles : les indécidables évoqués par les théorèmes de Gödel dépendent du système formel envisagé.

INDÉCIDABLES RELATIFS OU ABSOLUS ?

Dans un certain sens, il n'existe pas d'indécidable absolu : si E est un indécidable d'un système cohérent S , en ajoutant à S l'axiome E on obtient le système S' qui est encore cohérent, mais où E n'est plus indécidable ! Ce n'est bien sûr pas dans ce sens que Gödel envisage les indécidables absolus dans sa disjonction. Même si, par jeu, on envisage le système S' , il n'est pas vrai que les mathématiciens envisageront sérieusement ce qu'indique S' du monde mathématique ; >

> ils n'accepteront de le faire que lorsqu'ils seront certains que les nouveaux systèmes sont conformes à la réalité mathématique. Or les indécidables absolus que Gödel envisageait sont des énoncés qui seraient mathématiquement vrais, mais dont l'esprit mathématique humain ne pourrait jamais vraiment comprendre qu'ils sont vrais. Expliquons cette délicate distinction avec un exemple.

D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, l'arithmétique de Peano peut exprimer l'énoncé Cohé(PEANO) affirmant qu'elle est cohérente, et cet énoncé est indécidable dans PEANO. Cela signifie qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome Cohé(PEANO) donnant un nouveau système PEANO', mais aussi qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome non-Cohé(PEANO) donnant un autre nouveau système PEANO". Ces deux extensions sont toutes deux cohérentes si PEANO l'est. Pourtant, le mathématicien n'envisage sérieusement que la première, PEANO', car la

compréhension qu'il a des nombres entiers est telle qu'il ne doute pas le moins du monde des axiomes de PEANO et des règles de raisonnement qui permettent de déduire des théorèmes dans PEANO; il est donc convaincu, même si PEANO ne peut pas le démontrer que Cohé(PEANO) est vrai.

Face à un indécidable E d'un système formel S, l'esprit du mathématicien sera parfois guidé (comme dans l'exemple) par la compréhension qu'il a des objets mathématiques. Dans de tels cas, il optera pour l'une des options E ou non-E, une seule de ces deux options correspondant à la réalité mathématique.

La question posée par Gödel est: face à un indécidable, le mathématicien pourra-t-il toujours opter (à plus ou moins long terme) pour l'une des deux éventualités E ou non-E? S'il ne le peut pas, E sera un indécidable absolu. L'encadré 1 présente un énoncé indécidable qui se trouve aujourd'hui dans cette délicate indétermination.

COMMENT GÖDEL A PROUVÉ LA DISJONCTION

Reprenons le raisonnement qu'a proposé Gödel pour établir la disjonction.

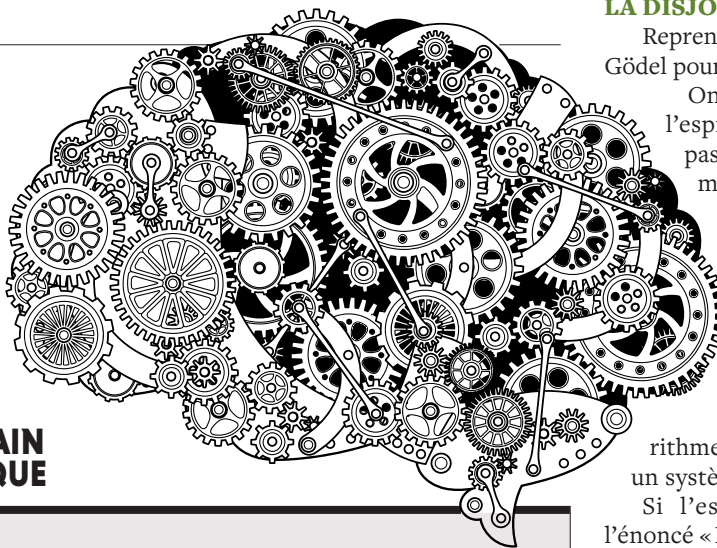
On part de l'alternative suivante. Soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme (autrement dit, l'homme n'est pas une machine). Soit l'esprit mathématique humain se réduit à un algorithme, auquel cas tout ce qui sera produit dans l'avenir comme nouveaux axiomes et systèmes formels plus puissants pourra s'exprimer dans un seul système formel, car à un algorithme donné on peut toujours associer un système formel.

Si l'esprit humain est mécanisable, l'énoncé «Le système S_H englobant toutes les vérités mathématiques humainement accessibles est cohérent» sera vrai, car la description d'une réalité est nécessairement cohérente. Pourtant, cette affirmation de cohérence ne sera pas démontrable par ce système, d'après le second théorème d'incomplétude: ce sera donc un indécidable absolu au sens où Gödel l'envisageait, une affirmation mathématique vraie définitivement, mais hors du champ de la pensée mathématique humaine. Il existera donc des indécidables absolus. Cela achève la démonstration de la disjonction de Gödel.

Notons que ce qu'affirme la disjonction est qu'au moins l'une des deux affirmations exprimées est vraie, mais qu'il n'est pas exclu que les deux soient vraies: il se peut qu'il existe des indécidables absolus et que l'esprit mathématique humain ne soit pas mécanisable.

2

L'ESPRIT HUMAIN ALGORITHMIQUE



Dans toute la discussion sur la disjonction de Gödel, on utilise comme acquises les équivalences entre les affirmations :

- (a) l'esprit humain est mécanisable ;
- (b) l'esprit humain est algorithmique ;
- (c) l'esprit humain se réduit à une machine ;
- (d) l'esprit humain est équivalent à un système formel comme les logiciens en considèrent pour définir la notion de démonstration mathématique.

Bien sûr, chaque affirmation demande une discussion et une justification détaillée. Cependant, et c'est aussi l'une des avancées de la philosophie des mathématiques, un accord à peu près unanime a été obtenu pour affirmer que, pour l'essentiel, les affirmations (a), (b), (c) et (d) signifient la même chose. L'un des points importants de la discussion

conduisant à cet accord est ce qu'on nomme la thèse de Church-Turing, selon laquelle la notion mathématique d'algorithme telle que l'informatique l'utilise capte parfaitement le concept de « mécanisable », ou de « faisable par machine ». Concernant les systèmes formels, l'idée que les preuves mathématiquement acceptables doivent être vérifiables mécaniquement justifie la dernière ligne.

Précisons toutefois que, dans toutes ces définitions, on envisage un esprit humain idéalisé disposant d'une mémoire potentiellement infinie et non limitée par le temps. Par exemple, un simple algorithme de multiplication entre deux entiers n et m exige une mémoire illimitée et un temps non borné si l'on veut qu'il s'applique à tout couple d'entiers n , m sans limitation de taille.