

> ils n'accepteront de le faire que lorsqu'ils seront certains que les nouveaux systèmes sont conformes à la réalité mathématique. Or les indécidables absolus que Gödel envisageait sont des énoncés qui seraient mathématiquement vrais, mais dont l'esprit mathématique humain ne pourrait jamais vraiment comprendre qu'ils sont vrais. Expliquons cette délicate distinction avec un exemple.

D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, l'arithmétique de Peano peut exprimer l'énoncé Cohé(PEANO) affirmant qu'elle est cohérente, et cet énoncé est indécidable dans PEANO. Cela signifie qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome Cohé(PEANO) donnant un nouveau système PEANO', mais aussi qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome non-Cohé(PEANO) donnant un autre nouveau système PEANO". Ces deux extensions sont toutes deux cohérentes si PEANO l'est. Pourtant, le mathématicien n'envisage sérieusement que la première, PEANO', car la

compréhension qu'il a des nombres entiers est telle qu'il ne doute pas le moins du monde des axiomes de PEANO et des règles de raisonnement qui permettent de déduire des théorèmes dans PEANO; il est donc convaincu, même si PEANO ne peut pas le démontrer que Cohé(PEANO) est vrai.

Face à un indécidable E d'un système formel S, l'esprit du mathématicien sera parfois guidé (comme dans l'exemple) par la compréhension qu'il a des objets mathématiques. Dans de tels cas, il optera pour l'une des options E ou non-E, une seule de ces deux options correspondant à la réalité mathématique.

La question posée par Gödel est : face à un indécidable, le mathématicien pourra-t-il toujours opter (à plus ou moins long terme) pour l'une des deux éventualités E ou non-E? S'il ne le peut pas, E sera un indécidable absolu. L'encadré 1 présente un énoncé indécidable qui se trouve aujourd'hui dans cette délicate indétermination.

COMMENT GÖDEL A PROUVÉ LA DISJONCTION

Reprenons le raisonnement qu'a proposé Gödel pour établir la disjonction.

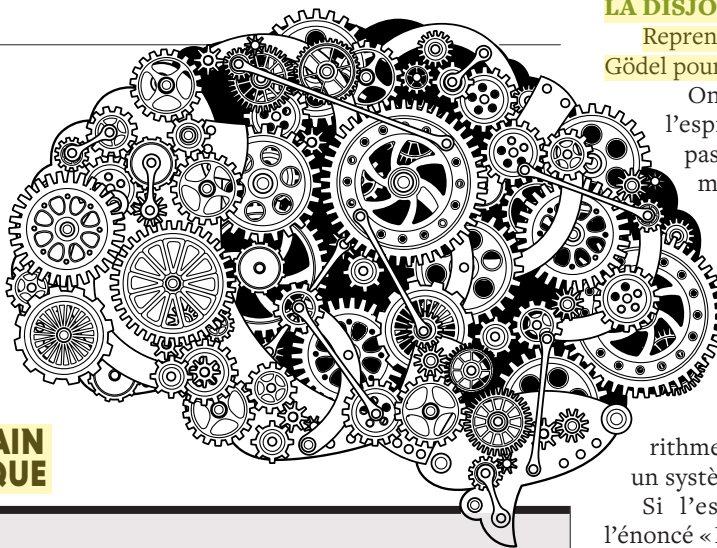
On part de l'alternative suivante. Soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme (autrement dit, l'homme n'est pas une machine). Soit l'esprit mathématique humain se réduit à un algorithme, auquel cas tout ce qui sera produit dans l'avenir comme nouveaux axiomes et systèmes formels plus puissants pourra s'exprimer dans un seul système formel, car à un algorithme donné on peut toujours associer un système formel.

Si l'esprit humain est mécanisable, l'énoncé «Le système S_H englobant toutes les vérités mathématiques humainement accessibles est cohérent» sera vrai, car la description d'une réalité est nécessairement cohérente. Pourtant, cette affirmation de cohérence ne sera pas démontrable par ce système, d'après le second théorème d'incomplétude : ce sera donc un indécidable absolu au sens où Gödel l'envisageait, une affirmation mathématique vraie définitivement, mais hors du champ de la pensée mathématique humaine. Il existera donc des indécidables absolus. Cela achève la démonstration de la disjonction de Gödel.

Notons que ce qu'affirme la disjonction est qu'au moins l'une des deux affirmations exprimées est vraie, mais qu'il n'est pas exclu que les deux soient vraies : il se peut qu'il existe des indécidables absolus et que l'esprit mathématique humain ne soit pas mécanisable.

2

L'ESPRIT HUMAIN ALGORITHMIQUE



Dans toute la discussion sur la disjonction de Gödel, on utilise comme acquises les équivalences entre les affirmations :

- (a) l'esprit humain est mécanisable ;
- (b) l'esprit humain est algorithmique ;
- (c) l'esprit humain se réduit à une machine ;
- (d) l'esprit humain est équivalent à un système formel comme les logiciens en considèrent pour définir la notion de démonstration mathématique.

Bien sûr, chaque affirmation demande une discussion et une justification détaillée. Cependant, et c'est aussi l'une des avancées de la philosophie des mathématiques, un accord à peu près unanime a été obtenu pour affirmer que, pour l'essentiel, les affirmations (a), (b), (c) et (d) signifient la même chose. L'un des points importants de la discussion

conduisant à cet accord est ce qu'on nomme la thèse de Church-Turing, selon laquelle la notion mathématique d'algorithme telle que l'informatique l'utilise capte parfaitement le concept de « mécanisable », ou de « faisable par machine ». Concernant les systèmes formels, l'idée que les preuves mathématiquement acceptables doivent être vérifiables mécaniquement justifie la dernière ligne.

Précisons toutefois que, dans toutes ces définitions, on envisage un esprit humain idéalisé disposant d'une mémoire potentiellement infinie et non limitée par le temps. Par exemple, un simple algorithme de multiplication entre deux entiers n et m exige une mémoire illimitée et un temps non borné si l'on veut qu'il s'applique à tout couple d'entiers n , m sans limitation de taille.