

> ils n'accepteront de le faire que lorsqu'ils seront certains que les nouveaux systèmes sont conformes à la réalité mathématique. Or les indécidables absolus que Gödel envisageait sont des énoncés qui seraient mathématiquement vrais, mais dont l'esprit mathématique humain ne pourrait jamais vraiment comprendre qu'ils sont vrais. Expliquons cette délicate distinction avec un exemple.

D'après le second théorème d'incomplétude de Gödel, l'arithmétique de Peano peut exprimer l'énoncé Cohé(PEANO) affirmant qu'elle est cohérente, et cet énoncé est indécidable dans PEANO. Cela signifie qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome Cohé(PEANO) donnant un nouveau système PEANO', mais aussi qu'on peut ajouter à PEANO l'axiome non-Cohé(PEANO) donnant un autre nouveau système PEANO". Ces deux extensions sont toutes deux cohérentes si PEANO l'est. Pourtant, le mathématicien n'envisage sérieusement que la première, PEANO', car la

compréhension qu'il a des nombres entiers est telle qu'il ne doute pas le moins du monde des axiomes de PEANO et des règles de raisonnement qui permettent de déduire des théorèmes dans PEANO; il est donc convaincu, même si PEANO ne peut pas le démontrer que Cohé(PEANO) est vrai.

Face à un indécidable E d'un système formel S, l'esprit du mathématicien sera parfois guidé (comme dans l'exemple) par la compréhension qu'il a des objets mathématiques. Dans de tels cas, il optera pour l'une des options E ou non-E, une seule de ces deux options correspondant à la réalité mathématique.

La question posée par Gödel est: face à un indécidable, le mathématicien pourra-t-il toujours opter (à plus ou moins long terme) pour l'une des deux éventualités E ou non-E? S'il ne le peut pas, E sera un indécidable absolu. L'encadré 1 présente un énoncé indécidable qui se trouve aujourd'hui dans cette délicate indétermination.

COMMENT GÖDEL A PROUVÉ LA DISJONCTION

Reprenons le raisonnement qu'a proposé Gödel pour établir la disjonction.

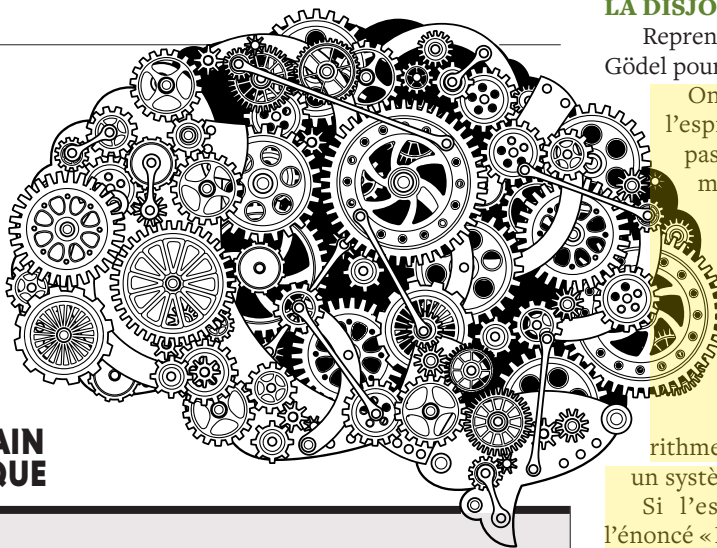
On part de l'alternative suivante. Soit l'esprit mathématique humain ne peut pas être réduit à un algorithme (autrement dit, l'homme n'est pas une machine). Soit l'esprit mathématique humain se réduit à un algorithme, auquel cas tout ce qui sera produit dans l'avenir comme nouveaux axiomes et systèmes formels plus puissants pourra s'exprimer dans un seul système formel, car à un algorithme donné on peut toujours associer un système formel.

Si l'esprit humain est mécanisable, l'énoncé «Le système S_H englobant toutes les vérités mathématiques humainement accessibles est cohérent» sera vrai, car la description d'une réalité est nécessairement cohérente. Pourtant, cette affirmation de cohérence ne sera pas démontrable par ce système, d'après le second théorème d'incomplétude: ce sera donc un indécidable absolu au sens où Gödel l'envisageait, une affirmation mathématique vraie définitivement, mais hors du champ de la pensée mathématique humaine. Il existera donc des indécidables absolus. Cela achève la démonstration de la disjonction de Gödel.

Notons que ce qu'affirme la disjonction est qu'au moins l'une des deux affirmations exprimées est vraie, mais qu'il n'est pas exclu que les deux soient vraies: il se peut qu'il existe des indécidables absolus et que l'esprit mathématique humain ne soit pas mécanisable.

2

L'ESPRIT HUMAIN ALGORITHMIQUE



Dans toute la discussion sur la disjonction de Gödel, on utilise comme acquises les équivalences entre les affirmations :

- (a) l'esprit humain est mécanisable ;
- (b) l'esprit humain est algorithmique ;
- (c) l'esprit humain se réduit à une machine ;
- (d) l'esprit humain est équivalent à un système formel comme les logiciens en considèrent pour définir la notion de démonstration mathématique.

Bien sûr, chaque affirmation demande une discussion et une justification détaillée. Cependant, et c'est aussi l'une des avancées de la philosophie des mathématiques, un accord à peu près unanime a été obtenu pour affirmer que, pour l'essentiel, les affirmations (a), (b), (c) et (d) signifient la même chose. L'un des points importants de la discussion

conduisant à cet accord est ce qu'on nomme la thèse de Church-Turing, selon laquelle la notion mathématique d'algorithme telle que l'informatique l'utilise capte parfaitement le concept de « mécanisable », ou de « faisable par machine ». Concernant les systèmes formels, l'idée que les preuves mathématiquement acceptables doivent être vérifiables mécaniquement justifie la dernière ligne.

Précisons toutefois que, dans toutes ces définitions, on envisage un esprit humain idéalisé disposant d'une mémoire potentiellement infinie et non limitée par le temps. Par exemple, un simple algorithme de multiplication entre deux entiers n et m exige une mémoire illimitée et un temps non borné si l'on veut qu'il s'applique à tout couple d'entiers n , m sans limitation de taille.

Tous ceux qui se sont penchés depuis 1951 sur la conclusion de Gödel ont reconnu que son raisonnement était imparable. Bien qu'il s'agisse d'une question de nature philosophique, elle est traitée avec suffisamment de rigueur, en s'appuyant sur des résultats indiscutables, pour que toutes les personnes qui comprennent le sens de la disjonction de Gödel l'approuvent.

La question posée est alors: comment déterminer quelle branche de la disjonction doit être considérée comme vraie et, éventuellement, a-t-on des raisons de croire que les deux termes de la disjonction sont vrais? L'affaire est d'importance, car prouver que l'esprit humain n'est pas mécanisable serait une grande avancée, de même qu'établir l'existence d'indécidables absolus.

POUR GÖDEL ET HILBERT, IL N'Y A PAS D'IGNORABIMUS

Gödel avait une préférence pour la solution: «L'esprit mathématique humain n'est pas mécanisable et il n'existe pas d'indécidables absolus.» Sa conception, qu'on désigne sous le terme de réalisme ensembliste, était que nous disposons d'une sorte d'aptitude à percevoir les vérités mathématiques concernant les ensembles et que cela nous donne accès à toutes les vérités mathématiques. Cette capacité à comprendre exige des efforts, mais Gödel pensait qu'à la longue, nous accéderions à toutes les vérités du monde mathématique.

Cette position était celle aussi du grand mathématicien allemand David Hilbert, qui a très explicitement défendu, lors du congrès des mathématiciens tenu en 1900 à Paris, l'idée qu'«il n'existe pas d'*ignorabimus* en mathématiques». En latin, la maxime *Ignoramus et ignorabimus* signifie *Nous ne savons pas et ne saurons jamais*. Hilbert comme Gödel pensaient que toute question mathématique bien posée finit par trouver une réponse.

Toutefois, Gödel, bien que préférant la première branche de l'alternative, reconnaissait qu'il ne disposait pas d'arguments concluants pour l'affirmer. Pour lui, la disjonction était sûre, mais rien ne permettait de préciser la bonne branche de la disjonction.

Depuis bientôt quatre-vingts ans, de nombreuses tentatives ont été menées pour décider entre les deux options. Un colloque réuni récemment à l'université de Bristol a fait le bilan des travaux de logique et des arguments traitant de la disjonction de Gödel. Un ouvrage publié sous la direction de Léon Horsten et Philip Welch en a résulté (voir la bibliographie). Nous en présenterons quelques aspects.

Le raisonnement assez simple suivant, dont diverses versions ont circulé, semble définitivement établir qu'il faut choisir l'option: >

3

L'HYPOTHÈSE DE COHÉRENCE

Dans les raisonnements présentés, on suppose que l'esprit humain, au moins quand on ne considère que les mathématiques, est cohérent, c'est-à-dire qu'il ne se contredit jamais. La justification de cette hypothèse est que, par exemple, nous n'avons aucun doute que les entiers existent et que le raisonnement par récurrence « Si [l'affirmation P_n est vraie pour $n = 0$] et si [P_n implique P_{n+1} pour tout entier n], alors [P_n est vraie pour tout entier positif n] » ne produira jamais aucune absurdité. En raisonnant à partir d'axiomes vrais de toute évidence et de règles de raisonnement sûres telles que le raisonnement par récurrence, nous sommes certains de ne jamais produire de contradiction.

L'hypothèse de cohérence est le plus souvent acceptable: notre compréhension intime des objets mathématiques garantit la non-contradiction de systèmes formels tels que celui de l'arithmétique de Peano. Il faut cependant noter que lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie des systèmes formels, la certitude de la cohérence devient discutable. Il se peut parfois qu'on ait le sentiment de concevoir un monde mathématique solide et donc cohérent, alors qu'on est dans l'illusion et que les règles qu'on introduit, bien que cela nous échappe, produisent des contradictions.

C'est arrivé plusieurs fois en mathématiques. Quand Gottlob Frege a conçu pour la première fois un système d'axiomes pour parler des ensembles, il ne doutait pas de sa cohérence et pourtant on y a découvert une contradiction, le paradoxe de Russell (voir <https://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/>).

C'est arrivé aussi avec certains axiomes de grands cardinaux qui semblaient acceptables et dont pourtant Kenneth Kunen a montré en 1971 qu'ils produisaient des absurdités (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Kunen%27s_inconsistency_theorem).

Il faut donc se méfier de notre intuition et être extrêmement attentif avant de considérer comme une évidence que de nouveaux axiomes qu'on souhaite adjoindre aux théories acceptées n'y introduisent pas de contradiction.

