

Tous ceux qui se sont penchés depuis 1951 sur la conclusion de Gödel ont reconnu que son raisonnement était imparable. Bien qu'il s'agisse d'une question de nature philosophique, elle est traitée avec suffisamment de rigueur, en s'appuyant sur des résultats indiscutables, pour que toutes les personnes qui comprennent le sens de la disjonction de Gödel l'approuvent.

La question posée est alors: comment déterminer quelle branche de la disjonction doit être considérée comme vraie et, éventuellement, a-t-on des raisons de croire que les deux termes de la disjonction sont vrais? L'affaire est d'importance, car prouver que l'esprit humain n'est pas mécanisable serait une grande avancée, de même qu'établir l'existence d'indécidables absolus.

POUR GÖDEL ET HILBERT, IL N'Y A PAS D'IGNORABIMUS

Gödel avait une préférence pour la solution: «L'esprit mathématique humain n'est pas mécanisable et il n'existe pas d'indécidables absolus.» Sa conception, qu'on désigne sous le terme de réalisme ensembliste, était que nous disposons d'une sorte d'aptitude à percevoir les vérités mathématiques concernant les ensembles et que cela nous donne accès à toutes les vérités mathématiques. Cette capacité à comprendre exige des efforts, mais Gödel pensait qu'à la longue, nous accéderions à toutes les vérités du monde mathématique.

Cette position était celle aussi du grand mathématicien allemand David Hilbert, qui a très explicitement défendu, lors du congrès des mathématiciens tenu en 1900 à Paris, l'idée qu'«il n'existe pas d'*ignorabimus* en mathématiques». En latin, la maxime *Ignoramus et ignorabimus* signifie *Nous ne savons pas et ne saurons jamais*. Hilbert comme Gödel pensaient que toute question mathématique bien posée finit par trouver une réponse.

Toutefois, Gödel, bien que préférant la première branche de l'alternative, reconnaissait qu'il ne disposait pas d'arguments concluants pour l'affirmer. Pour lui, la disjonction était sûre, mais rien ne permettait de préciser la bonne branche de la disjonction.

Depuis bientôt quatre-vingts ans, de nombreuses tentatives ont été menées pour décider entre les deux options. Un colloque réuni récemment à l'université de Bristol a fait le bilan des travaux de logique et des arguments traitant de la disjonction de Gödel. Un ouvrage publié sous la direction de Léon Horsten et Philip Welch en a résulté (voir la bibliographie). Nous en présenterons quelques aspects.

Le raisonnement assez simple suivant, dont diverses versions ont circulé, semble définitivement établir qu'il faut choisir l'option: >

3

L'HYPOTHÈSE DE COHÉRENCE

Dans les raisonnements présentés, on suppose que l'esprit humain, au moins quand on ne considère que les mathématiques, est cohérent, c'est-à-dire qu'il ne se contredit jamais. La justification de cette hypothèse est que, par exemple, nous n'avons aucun doute que les entiers existent et que le raisonnement par récurrence « Si [l'affirmation P_n est vraie pour $n = 0$] et si [P_n implique P_{n+1} pour tout entier n], alors [P_n est vraie pour tout entier positif n] » ne produira jamais aucune absurdité. En raisonnant à partir d'axiomes vrais de toute évidence et de règles de raisonnement sûres telles que le raisonnement par récurrence, nous sommes certains de ne jamais produire de contradiction.

L'hypothèse de cohérence est le plus souvent acceptable: notre compréhension intime des objets mathématiques garantit la non-contradiction de systèmes formels tels que celui de l'arithmétique de Peano. Il faut cependant noter que lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie des systèmes formels, la certitude de la cohérence devient discutable. Il se peut parfois qu'on ait le sentiment de concevoir un monde mathématique solide et donc cohérent, alors qu'on est dans l'illusion et que les règles qu'on introduit, bien que cela nous échappe, produisent des contradictions.

C'est arrivé plusieurs fois en mathématiques. Quand Gottlob Frege a conçu pour la première fois un système d'axiomes pour parler des ensembles, il ne doutait pas de sa cohérence et pourtant on y a découvert une contradiction, le paradoxe de Russell (voir <https://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox/>).

C'est arrivé aussi avec certains axiomes de grands cardinaux qui semblaient acceptables et dont pourtant Kenneth Kunen a montré en 1971 qu'ils produisaient des absurdités (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Kunen%27s_inconsistency_theorem).

Il faut donc se méfier de notre intuition et être extrêmement attentif avant de considérer comme une évidence que de nouveaux axiomes qu'on souhaite adjoindre aux théories acceptées n'y introduisent pas de contradiction.





L'APPROCHE DU MULTIVERS

4

Pour justifier qu'il existe des indécidables absolus, tout en préservant l'idée qu'il existe un univers mathématique indépendant de nous (position réaliste à laquelle nombre de mathématiciens sont attachés), les logiciens ont introduit le concept de « multivers ensembliste ». Le monde mathématique serait composé de parties indépendantes dont les propriétés seraient différentes. Les indécidables absolus seraient les propriétés qui ne sont pas vraies dans toutes les composantes du multivers. Ainsi, l'hypothèse du continu, HC, serait vraie dans certaines composantes et fausse dans d'autres.

Le débat au sujet de la philosophie réaliste des mathématiques a pris la forme d'une opposition entre la position « universiste » qui défend l'existence d'un unique monde ensembliste maximal (on accepte autant qu'on le peut tous les axiomes affirmant l'existence de grands ensembles) et la position « multiversiste » qui imagine une multitude de mondes ensemblistes maximaux différents. Pour

les universistes, dont Gödel aurait sans doute fait partie, il n'y a pas d'indécidable absolu. Pour les multiversistes, l'existence d'indécidables absolus n'est pas ennuyeuse (ce sont les énoncés dont la vérité change d'une composante à l'autre) et, surtout, n'est pas en contradiction avec l'idée d'un réel mathématique. L'incapacité des mathématiciens, depuis plus d'un siècle, à formuler des axiomes naturels qui aient pour conséquence HC ou non-HC est vue comme un argument en faveur du multiversisme.

Le grand logicien Hugh Woodin, de l'université Harvard, qui n'est pourtant pas un adepte du multiversisme, affirme à ce sujet : « Les raffinements de la méthode de forcing de Cohen depuis sa découverte initiale [pour établir que HC n'est pas démontrable dans ZFC] et la pléthore de problèmes dont on a prouvé grâce à cette méthode qu'ils sont [comme HC] impossibles à résoudre [dans ZFC], ont en pratique presque obligé à adopter la position multiversiste ».

» « L'esprit mathématique humain ne se réduit pas à un algorithme. »

- Si l'esprit humain était une machine, les vérités mathématiques qu'il accepte et acceptera seraient les théorèmes d'un système formel cohérent S_H (indice H pour *humain*). Mais l'être humain ne doute pas que sa conception mathématique est cohérente, car il n'accepte de n'y mettre que ce dont il est absolument certain. Il serait donc convaincu que $Cohé(S_H)$ est vrai. Cela signifierait que S_H est un système formel qui voit sa propre cohérence, ce qui est en contradiction avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, dont la démonstration ne fait aucun doute. Cette contradiction montre que l'esprit humain n'est pas mécanisable.

DES RAISONNEMENTS POUR MONTRER QUE L'ESPRIT HUMAIN N'EST PAS UNE MACHINE

Ce type de raisonnement est assez convaincant et apparaît aussi rigoureux que celui conduisant à la disjonction de Gödel. L'argument a été formulé la première fois par le philosophe britannique John Randolph Lucas. Plus récemment, des variantes du raisonnement ont été défendues par le physicien et mathématicien britannique Roger Penrose. En utilisant deux formulations différentes, ce dernier maintient que des preuves incontestables démontrent que l'esprit humain n'est pas une machine. Pourquoi donc Gödel serait-il passé à côté de tout cela ?

Une explication de cette étrangeté a été proposée par le philosophe américain Paul Benacerraf. Pour que le mathématicien puisse produire l'indécidable affirmant sa propre cohérence, fait-il remarquer, il faudrait qu'il sache quel système formel exactement exprime la pensée mathématique humaine. Il faudrait donc qu'il dispose d'une capacité introspective parfaite, ce qui est difficile à imaginer.

Même si nous sommes équivalents à une machine, même si nous produisons une pensée mathématique claire sur laquelle nous n'avons pas de doute, nous faisons cela sans savoir quelles règles nous appliquons précisément, donc sans savoir quelle machine nous sommes. L'identification de nouveaux axiomes acceptables qui se produit de temps en temps ajoute de nouvelles règles et ce processus semble imprévisible, du moins pour nous, ce qui montre que nous ignorons quelle machine nous sommes, même si nous en sommes une. En conséquence, nous ne pouvons pas désigner précisément la formule qui affirme la cohérence de notre pensée mathématique. Il n'y a alors aucune contradiction entre le second théorème d'incomplétude et l'hypothèse que nous sommes mécanisables.