



L'APPROCHE DU MULTIVERS

4

Pour justifier qu'il existe des indécidables absolus, tout en préservant l'idée qu'il existe un univers mathématique indépendant de nous (position réaliste à laquelle nombre de mathématiciens sont attachés), les logiciens ont introduit le concept de « multivers ensembliste ». Le monde mathématique serait composé de parties indépendantes dont les propriétés seraient différentes. Les indécidables absolus seraient les propriétés qui ne sont pas vraies dans toutes les composantes du multivers. Ainsi, l'hypothèse du continu, HC, serait vraie dans certaines composantes et fausse dans d'autres.

Le débat au sujet de la philosophie réaliste des mathématiques a pris la forme d'une opposition entre la position « universiste » qui défend l'existence d'un unique monde ensembliste maximal (on accepte autant qu'on le peut tous les axiomes affirmant l'existence de grands ensembles) et la position « multiversiste » qui imagine une multitude de mondes ensemblistes maximaux différents. Pour

les universistes, dont Gödel aurait sans doute fait partie, il n'y a pas d'indécidable absolu. Pour les multiversistes, l'existence d'indécidables absolus n'est pas ennuyeuse (ce sont les énoncés dont la vérité change d'une composante à l'autre) et, surtout, n'est pas en contradiction avec l'idée d'un réel mathématique. L'incapacité des mathématiciens, depuis plus d'un siècle, à formuler des axiomes naturels qui aient pour conséquence HC ou non-HC est vue comme un argument en faveur du multiversisme.

Le grand logicien Hugh Woodin, de l'université Harvard, qui n'est pourtant pas un adepte du multiversisme, affirme à ce sujet : « Les raffinements de la méthode de forcing de Cohen depuis sa découverte initiale [pour établir que HC n'est pas démontrable dans ZFC] et la pléthore de problèmes dont on a prouvé grâce à cette méthode qu'ils sont [comme HC] impossibles à résoudre [dans ZFC], ont en pratique presque obligé à adopter la position multiversiste ».

> « L'esprit mathématique humain ne se réduit pas à un algorithme. »

- Si l'esprit humain était une machine, les vérités mathématiques qu'il accepte et acceptera seraient les théorèmes d'un système formel cohérent S_H (indice H pour *humain*). Mais l'être humain ne doute pas que sa conception mathématique est cohérente, car il n'accepte de n'y mettre que ce dont il est absolument certain. Il serait donc convaincu que $\text{Cohé}(S_H)$ est vrai. Cela signifierait que S_H est un système formel qui voit sa propre cohérence, ce qui est en contradiction avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, dont la démonstration ne fait aucun doute. Cette contradiction montre que l'esprit humain n'est pas mécanisable.

DES RAISONNEMENTS POUR MONTRER QUE L'ESPRIT HUMAIN N'EST PAS UNE MACHINE

Ce type de raisonnement est assez convaincant et apparaît aussi rigoureux que celui conduisant à la disjonction de Gödel. L'argument a été formulé la première fois par le philosophe britannique John Randolph Lucas. Plus récemment, des variantes du raisonnement ont été défendues par le physicien et mathématicien britannique Roger Penrose. En utilisant deux formulations différentes, ce dernier maintient que des preuves incontestables démontrent que l'esprit humain n'est pas une machine. Pourquoi donc Gödel serait-il passé à côté de tout cela ?

Une explication de cette étrangeté a été proposée par le philosophe américain Paul Benacerraf. Pour que le mathématicien puisse produire l'indécidable affirmant sa propre cohérence, fait-il remarquer, il faudrait qu'il sache quel système formel exactement exprime la pensée mathématique humaine. Il faudrait donc qu'il dispose d'une capacité introspective parfaite, ce qui est difficile à imaginer.

Même si nous sommes équivalents à une machine, même si nous produisons une pensée mathématique claire sur laquelle nous n'avons pas de doute, nous faisons cela sans savoir quelles règles nous appliquons précisément, donc sans savoir quelle machine nous sommes. L'identification de nouveaux axiomes acceptables qui se produit de temps en temps ajoute de nouvelles règles et ce processus semble imprévisible, du moins pour nous, ce qui montre que nous ignorons quelle machine nous sommes, même si nous en sommes une. En conséquence, nous ne pouvons pas désigner précisément la formule qui affirme la cohérence de notre pensée mathématique. Il n'y a alors aucune contradiction entre le second théorème d'incomplétude et l'hypothèse que nous sommes mécanisables.

Aujourd'hui, une grande majorité des logiciens et philosophes des mathématiques s'accordent sur cette critique fatale aux raisonnements de type Lucas. Il est probable que Gödel ait analysé et éliminé les arguments de type Lucas, et c'est pourquoi il n'a jamais reconnu comme acquise la première option de sa disjonction, qu'il préférerait pourtant.

L'hypothèse du continu est un indécidable absolu, si l'on accepte la définition de Feferman

BIBLIOGRAPHIE

M. Rathjen, **Indefiniteness in semi-intuitionistic set theories : On a conjecture of Feferman**, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 81(2), pp. 742-754, 2016.

L. Horsten et P. Welch (éd.), **Gödel's Disjonction**, Oxford University Press, 2016.

J. Väanänen, **Multiverse set theory and absolutely undecidable propositions**, 2014 (<http://bit.ly/2nTt2UT>).

J. D. Hamkins, **The set-theoretic multiverse**, *The Rev. of Symbolic Logic*, vol. 5(3), pp. 416-449, 2012.

S. Feferman, **Is the continuum hypothesis a definite mathematical problem ?**, 2011 (<http://bit.ly/2CkzyIB>).

P. Dehornoy, **Au-delà du forcing : la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles**, dans *Logique, dynamique et cognition*, J.-B. Joinet (éd.), Éditions de la Sorbonne, 2007 (<http://bit.ly/2o72PkR>).

L'autre option que certains mathématiciens et philosophes considèrent bien plus sérieuse est que des vérités mathématiques nous seront toujours inaccessibles. Plusieurs énoncés candidats ont été discutés et certains pourraient être des indécidables absolus. L'un des principaux candidats est l'« hypothèse du continu », énoncée par Georg Cantor en 1878 (voir l'encadré 1).

Certains axiomes affirmant l'existence d'ensembles très grands (on appelle cela les axiomes de grands cardinaux) sont considérés comme naturels et les mathématiciens sont prêts à les ajouter à ceux de ZFC. Ces axiomes renforcent le pouvoir de démonstration de la théorie des ensembles usuelle et constituent un progrès conforme à ce que Gödel attendait : un enrichissement du monde mathématique accessible à l'esprit humain.

Malheureusement, le mathématicien américain Paul Cohen a montré en 1963 que ces axiomes de grands cardinaux n'ont pas d'effet sur l'hypothèse du continu, qui reste donc indécidable même s'ils sont pris en compte. D'autres travaux, menés il y a une dizaine d'années par l'Américain Hugh Woodin, laissent entrevoir que l'hypothèse du continu pourrait être fausse. Une logique d'un type nouveau, nommée Ω -logique, et une conjecture jugée plausible, la Ω -conjecture, conduisent en effet à la négation de l'hypothèse du continu. On ne peut cependant pas conclure que la question est réglée, puisque la méthode ne fait pas l'unanimité chez les théoriciens des ensembles et que, de plus, la Ω -conjecture n'est pas établie.

Au total, plus d'un siècle après la formulation de l'hypothèse du continu par Cantor, l'esprit mathématique est resté impuissant à savoir ce qu'il en est. Il est donc plausible que nous ayons là un indécidable absolu. De nouveaux arguments sérieux vont d'ailleurs dans ce sens.

En effet, en utilisant une logique de type intuitionniste, c'est-à-dire qui adopte une attitude prudente concernant les énoncés impliquant l'infini, le logicien américain Solomon Feferman (mort en 2016) a proposé en 2011 une définition précise de la notion d'énoncés mathématiques bien définis, c'est-à-dire dont l'esprit mathématique humain doit pouvoir décider de la vérité ou de la fausseté.

Cette approche autorise un traitement rigoureux de la notion de vérité mathématique accessible à l'esprit humain et fournit un outil pour une éventuelle démonstration qu'il existe des indécidables absolus. Moyennant cette notion, Feferman espérait prouver que l'hypothèse du continu est un indécidable absolu, mais il n'y parvint pas. C'est chose faite aujourd'hui : en 2016, Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Angleterre, a prouvé que si l'on admet la définition introduite par Feferman, l'hypothèse du continu est un indécidable absolu.

On ne peut considérer que le problème soit définitivement réglé (il faudrait pour cela que tous les mathématiciens acceptent l'analyse de la notion d'indécidable absolu proposée par Feferman). Toutefois, on constate encore une fois que, en réussissant à rendre précises et purement mathématiques des questions philosophiques, la logique permet de progresser.

DES MONDES MATHÉMATIQUES MULTIPLES ?

Une autre approche se fonde sur l'idée du multivers (voir l'encadré 4) parfois prise très au sérieux en physique. Le monde mathématique, comme le monde physique, ne serait pas unique : il en existerait plusieurs versions. Par exemple, dans certains de ces univers mathématiques parallèles, l'hypothèse du continu serait vraie, tandis qu'elle serait fausse dans les autres. Notre intuition mathématique nous donnerait accès uniquement aux vérités communes à tous ces univers. Les indécidables absolus seraient alors les énoncés mathématiques dont le statut, vrai ou faux, change d'une branche du multivers à l'autre.

On a le plaisir de découvrir qu'au moins pour ce qui concerne sa partie relative aux mathématiques, la philosophie, grâce à Gödel et à ses successeurs, est une discipline en progrès où les énigmes, aussi profondes soient-elles, sont susceptibles d'être résolues... même si cela prend beaucoup de temps. ■