

Aujourd'hui, une grande majorité des logiciens et philosophes des mathématiques s'accordent sur cette critique fatale aux raisonnements de type Lucas. Il est probable que Gödel ait analysé et éliminé les arguments de type Lucas, et c'est pourquoi il n'a jamais reconnu comme acquise la première option de sa disjonction, qu'il préférerait pourtant.

L'hypothèse du continu est un indécidable absolu, si l'on accepte la définition de Feferman

BIBLIOGRAPHIE

M. Rathjen, **Indefiniteness in semi-intuitionistic set theories : On a conjecture of Feferman**, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 81(2), pp. 742-754, 2016.

L. Horsten et P. Welch (éd.), **Gödel's Disjonction**, Oxford University Press, 2016.

J. Väanänen, **Multiverse set theory and absolutely undecidable propositions**, 2014 (<http://bit.ly/2nTt2UT>).

J. D. Hamkins, **The set-theoretic multiverse**, *The Rev. of Symbolic Logic*, vol. 5(3), pp. 416-449, 2012.

S. Feferman, **Is the continuum hypothesis a definite mathematical problem ?**, 2011 (<http://bit.ly/2CkzyIB>).

P. Dehornoy, **Au-delà du forcing : la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles**, dans *Logique, dynamique et cognition*, J.-B. Joinet (éd.), Éditions de la Sorbonne, 2007 (<http://bit.ly/2o72Pkr>).

L'autre option que certains mathématiciens et philosophes considèrent bien plus sérieuse est que des vérités mathématiques nous seront toujours inaccessibles. Plusieurs énoncés candidats ont été discutés et certains pourraient être des indécidables absolus. L'un des principaux candidats est l'« hypothèse du continu », énoncée par Georg Cantor en 1878 (voir l'encadré 1).

Certains axiomes affirmant l'existence d'ensembles très grands (on appelle cela les axiomes de grands cardinaux) sont considérés comme naturels et les mathématiciens sont prêts à les ajouter à ceux de ZFC. Ces axiomes renforcent le pouvoir de démonstration de la théorie des ensembles usuelle et constituent un progrès conforme à ce que Gödel attendait : un enrichissement du monde mathématique accessible à l'esprit humain.

Malheureusement, le mathématicien américain Paul Cohen a montré en 1963 que ces axiomes de grands cardinaux n'ont pas d'effet sur l'hypothèse du continu, qui reste donc indécidable même s'ils sont pris en compte. D'autres travaux, menés il y a une dizaine d'années par l'Américain Hugh Woodin, laissent entrevoir que l'hypothèse du continu pourrait être fausse. Une logique d'un type nouveau, nommée Ω -logique, et une conjecture jugée plausible, la Ω -conjecture, conduisent en effet à la négation de l'hypothèse du continu. On ne peut cependant pas conclure que la question est réglée, puisque la méthode ne fait pas l'unanimité chez les théoriciens des ensembles et que, de plus, la Ω -conjecture n'est pas établie.

Au total, plus d'un siècle après la formulation de l'hypothèse du continu par Cantor, l'esprit mathématique est resté impuissant à savoir ce qu'il en est. Il est donc plausible que nous ayons là un indécidable absolu. De nouveaux arguments sérieux vont d'ailleurs dans ce sens.

En effet, en utilisant une logique de type intuitionniste, c'est-à-dire qui adopte une attitude prudente concernant les énoncés impliquant l'infini, le logicien américain Solomon Feferman (mort en 2016) a proposé en 2011 une définition précise de la notion d'énoncés mathématiques bien définis, c'est-à-dire dont l'esprit mathématique humain doit pouvoir décider de la vérité ou de la fausseté.

Cette approche autorise un traitement rigoureux de la notion de vérité mathématique accessible à l'esprit humain et fournit un outil pour une éventuelle démonstration qu'il existe des indécidables absolus. Moyennant cette notion, Feferman espérait prouver que l'hypothèse du continu est un indécidable absolu, mais il n'y parvint pas. C'est chose faite aujourd'hui : en 2016, Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Angleterre, a prouvé que si l'on admet la définition introduite par Feferman, l'hypothèse du continu est un indécidable absolu.

On ne peut considérer que le problème soit définitivement réglé (il faudrait pour cela que tous les mathématiciens acceptent l'analyse de la notion d'indécidable absolu proposée par Feferman). Toutefois, on constate encore une fois que, en réussissant à rendre précises et purement mathématiques des questions philosophiques, la logique permet de progresser.

DES MONDES MATHÉMATIQUES MULTIPLES ?

Une autre approche se fonde sur l'idée du multivers (voir l'encadré 4) parfois prise très au sérieux en physique. Le monde mathématique, comme le monde physique, ne serait pas unique : il en existerait plusieurs versions. Par exemple, dans certains de ces univers mathématiques parallèles, l'hypothèse du continu serait vraie, tandis qu'elle serait fausse dans les autres. Notre intuition mathématique nous donnerait accès uniquement aux vérités communes à tous ces univers. Les indécidables absolus seraient alors les énoncés mathématiques dont le statut, vrai ou faux, change d'une branche du multivers à l'autre.

On a le plaisir de découvrir qu'au moins pour ce qui concerne sa partie relative aux mathématiques, la philosophie, grâce à Gödel et à ses successeurs, est une discipline en progrès où les énigmes, aussi profondes soient-elles, sont susceptibles d'être résolues... même si cela prend beaucoup de temps. ■