

Temps d'attente entre deux mètres, niveaux d'énergie des noyaux atomiques, nombres premiers, théorie des cordes, tsunamis, cours de la bourse, forme des protéines, antennes de téléphonie mobile, position des arbres dans une forêt, durée d'embarquement des passagers dans les avions, géométrie des surfaces, cristaux, conduction électronique... Qu'y a-t-il de commun dans cet inventaire à la Prévert? Dans tous ces phénomènes, que ce soit dans leur description ou leur modélisation, les chercheurs ont mis au jour des propriétés qui sont celles des matrices aléatoires...

Ces objets combinent un outil mathématique très répandu, les matrices, avec un phénomène lui aussi présent dans une multitude de situations, le hasard. Et bien que le hasard soit *a priori* un agent de désordre, d'irrégularité et d'imprévisibilité, les matrices aléatoires ont révélé des propriétés traduisant un surprenant ordre caché : elles se comportent de façon « universelle », c'est-à-dire qu'elles présentent des régularités statistiques identiques quel que soit le type de hasard mis en jeu, et donc quel que soit le phénomène aléatoire précis que la matrice est censée décrire.

L'étude des matrices aléatoires remonte au moins à 1928, époque où le mathématicien écossais John Wishart s'y est intéressé dans le cadre de l'analyse de données statistiques. Mais ce sont surtout les travaux du physicien théoricien d'origine hongroise Eugene Wigner sur les niveaux d'énergie des noyaux atomiques lourds, publiés en 1955, qui ont stimulé l'intérêt des scientifiques pour le sujet.

Plusieurs autres physiciens théoriciens ont ensuite contribué à la théorie de ces objets et à établir des liens avec divers problèmes de physique. Et les percées qu'ils ont réalisées dans les décennies 1970-1990 ont attiré vers le domaine de nombreux mathématiciens et chercheurs d'autres disciplines. Ces scientifiques ont découvert d'une part que les matrices aléatoires ont des propriétés fascinantes, d'autre part qu'elles interviennent dans maintes questions scientifiques ou techniques. La théorie de ces objets est ainsi devenue, depuis, un champ de recherche très actif.

Pour comprendre ce que sont les matrices aléatoires et leurs remarquables propriétés, expliquons d'abord ce qu'est, en mathématiques, une matrice.

Étant donnés deux entiers positifs m et n , une matrice de dimension $m \times n$ est un tableau de $m \times n$ nombres rangés sur m lignes et n colonnes, ce tableau étant délimité par des parenthèses (voir l'encadré ci-dessus). Ici, on considérera presque toujours des matrices carrées (des matrices $n \times n$) et, le plus souvent, symétriques par rapport à leur diagonale.

MATRICES CARRÉES, SYMÉTRIQUES, HERMITIENNES

Une matrice est un tableau de nombres rangés en lignes et en colonnes, et qu'on délimite par des parenthèses de la taille appropriée. Les matrices carrées, qui ont autant de lignes que de colonnes, se rencontrent très fréquemment. Et parmi les matrices carrées, deux classes, celle des matrices symétriques et celle des matrices hermitiennes, jouent un rôle privilégié en physique.

Les matrices symétriques sont celles où les nombres se répètent symétriquement par rapport à la diagonale descendante de la matrice :

si a_{ij} désigne le nombre situé sur la ligne i et la colonne j , alors, si la matrice est symétrique, on a $a_{ij} = a_{ji}$ pour toutes les valeurs de i et de j .

Les matrices hermitiennes sont celles qui vérifient $a_{ij} = (a_{ji})^*$ pour toutes les valeurs de i et de j , où a^* désigne le complexe conjugué du nombre a (si $a = p + iq$, où p et q sont des nombres réels et i est le symbole vérifiant $i^2 = -1$, alors $a^* = p - iq$).

Exemple d'une matrice de dimension 2×4 (c'est-à-dire ayant 2 lignes et 4 colonnes) :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice carrée de dimension 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice symétrique de dimension 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice hermitienne de dimension 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 5 \\ 2-i & 3 & 1-i \\ 5 & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Si les matrices sont omniprésentes en mathématiques et dans leurs applications, c'est parce qu'elles permettent de représenter de façon très commode des opérateurs (ou applications) linéaires.

Au sens où on l'entend ici, un opérateur est un objet mathématique qui transforme une entrée (une liste de nombres) en une sortie (une autre liste de nombres). L'opérateur est dit linéaire si chaque nombre de la liste de sortie s'obtient en additionnant les nombres d'entrée pondérés par des coefficients multiplicatifs. Par exemple, si l'entrée est une liste de 4 nombres, et la sortie une liste de 2 nombres, l'opérateur est entièrement caractérisé par $2 \times 4 = 8$ coefficients, car pour chacun des 2 nombres de la sortie, il faut 4 coefficients, qui multiplient chacun un nombre de l'entrée. Dans cet exemple, l'opérateur linéaire est alors représenté par une matrice 2×4 , dont les éléments sont les coefficients en question (voir l'encadré page 39).

La liste d'entrée e et la liste de sortie s sont ce qu'on appelle des « vecteurs ». Si l'on note M la matrice qui transforme l'entrée e en la sortie s , on note l'opération $s = Me$ et on dit que le vecteur s est égal à la multiplication du vecteur e par la matrice M . Cette matrice comporte m lignes et n colonnes si le vecteur e est de dimension n (c'est-à-dire qu'il a n composantes) et si le vecteur s est de dimension m .