

Temps d'attente entre deux mètres, niveaux d'énergie des noyaux atomiques, nombres premiers, théorie des cordes, tsunamis, cours de la bourse, forme des protéines, antennes de téléphonie mobile, position des arbres dans une forêt, durée d'embarquement des passagers dans les avions, géométrie des surfaces, cristaux, conduction électronique... Qu'y a-t-il de commun dans cet inventaire à la Prévert? Dans tous ces phénomènes, que ce soit dans leur description ou leur modélisation, les chercheurs ont mis au jour des propriétés qui sont celles des matrices aléatoires...

Ces objets combinent un outil mathématique très répandu, les matrices, avec un phénomène lui aussi présent dans une multitude de situations, le hasard. Et bien que le hasard soit *a priori* un agent de désordre, d'irrégularité et d'imprévisibilité, les matrices aléatoires ont révélé des propriétés traduisant un surprenant ordre caché : elles se comportent de façon « universelle », c'est-à-dire qu'elles présentent des régularités statistiques identiques quel que soit le type de hasard mis en jeu, et donc quel que soit le phénomène aléatoire précis que la matrice est censée décrire.

L'étude des matrices aléatoires remonte au moins à 1928, époque où le mathématicien écossais John Wishart s'y est intéressé dans le cadre de l'analyse de données statistiques. Mais ce sont surtout les travaux du physicien théoricien d'origine hongroise Eugene Wigner sur les niveaux d'énergie des noyaux atomiques lourds, publiés en 1955, qui ont stimulé l'intérêt des scientifiques pour le sujet.

Plusieurs autres physiciens théoriciens ont ensuite contribué à la théorie de ces objets et à établir des liens avec divers problèmes de physique. Et les percées qu'ils ont réalisées dans les décennies 1970-1990 ont attiré vers le domaine de nombreux mathématiciens et chercheurs d'autres disciplines. Ces scientifiques ont découvert d'une part que les matrices aléatoires ont des propriétés fascinantes, d'autre part qu'elles interviennent dans maintes questions scientifiques ou techniques. La théorie de ces objets est ainsi devenue, depuis, un champ de recherche très actif.

Pour comprendre ce que sont les matrices aléatoires et leurs remarquables propriétés, expliquons d'abord ce qu'est, en mathématiques, une matrice.

Étant donnés deux entiers positifs m et n , une matrice de dimension $m \times n$ est un tableau de $m \times n$ nombres rangés sur m lignes et n colonnes, ce tableau étant délimité par des parenthèses (voir l'encadré ci-dessus). Ici, on considérera presque toujours des matrices carrées (des matrices $n \times n$) et, le plus souvent, symétriques par rapport à leur diagonale.

MATRICES CARRÉES, SYMÉTRIQUES, HERMITIENNES

Une matrice est un tableau de nombres rangés en lignes et en colonnes, et qu'on délimite par des parenthèses de la taille appropriée. Les matrices carrées, qui ont autant de lignes que de colonnes, se rencontrent très fréquemment. Et parmi les matrices carrées, deux classes, celle des matrices symétriques et celle des matrices hermitiennes, jouent un rôle privilégié en physique.

Les matrices symétriques sont celles où les nombres se répètent symétriquement par rapport à la diagonale descendante de la matrice :

Si les matrices sont omniprésentes en mathématiques et dans leurs applications, c'est parce qu'elles permettent de représenter de façon très commode des opérateurs (ou applications) linéaires.

Au sens où on l'entend ici, un opérateur est un objet mathématique qui transforme une entrée (une liste de nombres) en une sortie (une autre liste de nombres). L'opérateur est dit linéaire si chaque nombre de la liste de sortie s'obtient en additionnant les nombres d'entrée pondérés par des coefficients multiplicatifs. Par exemple, si l'entrée est une liste de 4 nombres, et la sortie une liste de 2 nombres, l'opérateur est entièrement caractérisé par $2 \times 4 = 8$ coefficients, car pour chacun des 2 nombres de la sortie, il faut 4 coefficients, qui multiplient chacun un nombre de l'entrée. Dans cet exemple, l'opérateur linéaire est alors représenté par une matrice 2×4 , dont les éléments sont les coefficients en question (voir l'encadré page 39).

La liste d'entrée e et la liste de sortie s sont ce qu'on appelle des « vecteurs ». Si l'on note M la matrice qui transforme l'entrée e en la sortie s , on note l'opération $s = Me$ et on dit que le vecteur s est égal à la multiplication du vecteur e par la matrice M . Cette matrice comporte m lignes et n colonnes si le vecteur e est de dimension n (c'est-à-dire qu'il a n composantes) et si le vecteur s est de dimension m .

si a_{ij} désigne le nombre situé sur la ligne i et la colonne j , alors, si la matrice est symétrique, on a $a_{ij} = a_{ji}$ pour toutes les valeurs de i et de j .

Les matrices hermitiennes sont celles qui vérifient $a_{ij} = (a_{ji})^*$ pour toutes les valeurs de i et de j , où a^* désigne le complexe conjugué du nombre a (si $a = p + iq$, où p et q sont des nombres réels et i est le symbole vérifiant $i^2 = -1$, alors $a^* = p - iq$).

Exemple d'une matrice de dimension 2×4 (c'est-à-dire ayant 2 lignes et 4 colonnes) :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice carrée de dimension 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice symétrique de dimension 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice hermitienne de dimension 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i & 5 \\ 2-i & 3 & 1-i \\ 5 & 1+i & 2 \end{pmatrix}$$

Les matrices, dont l'étude générale a été entreprise au milieu du XIX^e siècle avec les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester, sont l'un des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Comme on l'a dit, c'est un outil mathématique omniprésent. Donnons-en quelques illustrations.

LES MATRICES, DES OUTILS MULTITÂCHES

Un premier exemple est celui d'un comparateur de prix. Imaginons deux magasins qui vendent les mêmes quatre produits. Plaçons dans une matrice de dimension 2×4 les prix de chaque produit pour chaque magasin. Comme vecteur d'entrée, considérons une liste de courses: un vecteur de dimension 4 contenant les quantités désirées de chacun des quatre produits. Le vecteur de sortie, de dimension 2, est le montant total à payer pour cette liste de courses dans chacun des deux magasins, ce qui permet de comparer les prix.

De la même façon, en finances, on peut représenter par une matrice un courtier qui gère m portefeuilles contenant n types d'actions: on range dans une matrice de dimension $m \times n$ les nombres de chaque type d'action détenus dans chaque portefeuille. Le vecteur d'entrée étant choisi chaque jour comme la liste des valeurs des gains (éventuellement négatifs) de chaque action, le vecteur de sortie est la liste des gains de chaque portefeuille.

La transmission des ondes et des signaux est également souvent décrite par des matrices. Supposons, pour simplifier, qu'une onde parvenant au transmetteur soit composée de trois fréquences possibles, f_1, f_2 et f_3 . On représente alors cette onde par un vecteur de dimension 3, qui est la liste des poids respectifs des trois fréquences. Par exemple, le vecteur $(1/8, 1/2, 3/8)$

figurera une onde où la fréquence f_1 est présente avec un poids de $1/8$ (ou 12,5%), f_2 avec un poids de $1/2$ et f_3 avec un poids de $3/8$.

L'action du transmetteur serait de modifier la répartition de l'énergie de l'onde sur les trois fréquences, c'est-à-dire de modifier les poids des fréquences. Une telle modification est généralement linéaire et se représente donc par une «matrice de transmission» de dimension 3×3 . L'onde transmise sera par conséquent représentée par le vecteur égal au produit de cette matrice par le vecteur figurant l'onde incidente.

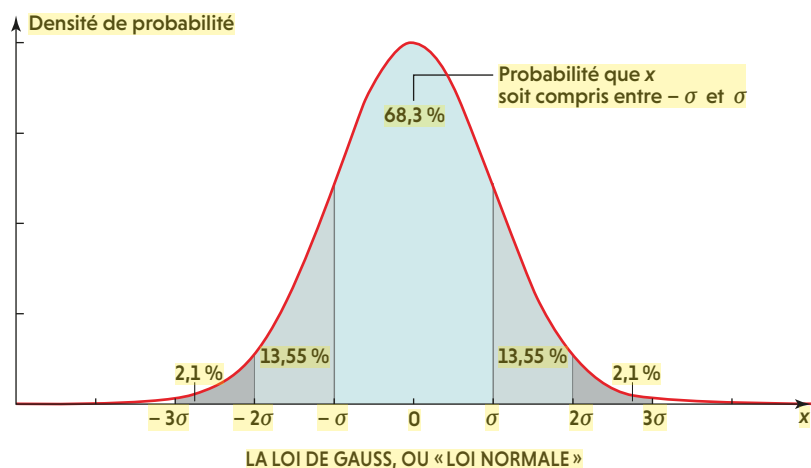
Dernier exemple, mais d'une grande importance: la mécanique quantique, dont la formulation qu'en avait donnée en 1925 le physicien allemand Werner Heisenberg a pour nom la «mécanique des matrices». Considérons un objet physique soumis à des interactions et pouvant occuper différents états de base (qui peuvent être des positions dans l'espace pour une particule, des orbites autour d'un noyau atomique pour un électron, des fréquences pour une onde lumineuse, etc.). Son état quantique se décrit par une «somme» des différentes possibilités, une superposition des états de base, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient lié à la probabilité d'observer l'objet dans l'état de base en question lors d'une mesure.

Autrement dit, à chaque instant, l'état quantique de l'objet est une liste de nombres (en général, il s'agit de nombres complexes): les coefficients associés à la probabilité d'occuper l'état de base 1, l'état de base 2, l'état de base 3, etc. L'état quantique est donc représenté par un vecteur dont la dimension est le nombre d'états de base possibles (ce nombre est souvent très grand, voire infini).

Cet état quantique évolue au cours du temps sous l'effet des interactions. D'après les lois de la physique quantique, cette évolution temporelle est régie par un opérateur linéaire nommé hamiltonien; la matrice qui le représente caractérise l'ensemble des interactions agissant sur l'objet, et transforme à chaque instant l'état du système en un autre.

L'opérateur hamiltonien est par ailleurs lié à une grandeur cruciale: l'énergie du système. Plus précisément, les valeurs possibles de cette énergie – les niveaux d'énergie du système – sont données par le «spectre» du hamiltonien. De quoi s'agit-il? Ce n'est ni un fantôme ni une organisation secrète que combat James Bond. Le spectre d'une matrice est un ensemble de nombres nommés *valeurs propres* et qui lui sont caractéristiques.

Ces notions étant fondamentales pour la suite de notre propos, détaillons-les un peu. Donnons-nous une matrice carrée M , qui représente des transformations linéaires entre vecteurs de même dimension. Pour un vecteur d'entrée e arbitraire, le vecteur de sortie $s = Me$ est généralement très différent de e . Mais pour



Cette loi de probabilité, proportionnelle à $\exp(-x^2/2\sigma)$ où x est l'écart à la moyenne et σ est l'écart-type, décrit une multitude de phénomènes de nature aléatoire. C'est elle que, dans les années 1950, Eugene Wigner a choisie pour définir les matrices aléatoires et les étudier: les nombres qui les composent sont tirés au hasard selon la loi de Gauss centrée sur 0.