

Les matrices, dont l'étude générale a été entreprise au milieu du XIX^e siècle avec les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester, sont l'un des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Comme on l'a dit, c'est un outil mathématique omniprésent. Donnons-en quelques illustrations.

LES MATRICES, DES OUTILS MULTITÂCHES

Un premier exemple est celui d'un comparateur de prix. Imaginons deux magasins qui vendent les mêmes quatre produits. Plaçons dans une matrice de dimension 2×4 les prix de chaque produit pour chaque magasin. Comme vecteur d'entrée, considérons une liste de courses: un vecteur de dimension 4 contenant les quantités désirées de chacun des quatre produits. Le vecteur de sortie, de dimension 2, est le montant total à payer pour cette liste de courses dans chacun des deux magasins, ce qui permet de comparer les prix.

De la même façon, en finances, on peut représenter par une matrice un courtier qui gère m portefeuilles contenant n types d'actions: on range dans une matrice de dimension $m \times n$ les nombres de chaque type d'action détenus dans chaque portefeuille. Le vecteur d'entrée étant choisi chaque jour comme la liste des valeurs des gains (éventuellement négatifs) de chaque action, le vecteur de sortie est la liste des gains de chaque portefeuille.

La transmission des ondes et des signaux est également souvent décrite par des matrices. Supposons, pour simplifier, qu'une onde parvenant au transmetteur soit composée de trois fréquences possibles, f_1 , f_2 et f_3 . On représente alors cette onde par un vecteur de dimension 3, qui est la liste des poids respectifs des trois fréquences. Par exemple, le vecteur $(1/8, 1/2, 3/8)$

figurera une onde où la fréquence f_1 est présente avec un poids de $1/8$ (ou 12,5%), f_2 avec un poids de $1/2$ et f_3 avec un poids de $3/8$.

L'action du transmetteur serait de modifier la répartition de l'énergie de l'onde sur les trois fréquences, c'est-à-dire de modifier les poids des fréquences. Une telle modification est généralement linéaire et se représente donc par une «matrice de transmission» de dimension 3×3 . L'onde transmise sera par conséquent représentée par le vecteur égal au produit de cette matrice par le vecteur figurant l'onde incidente.

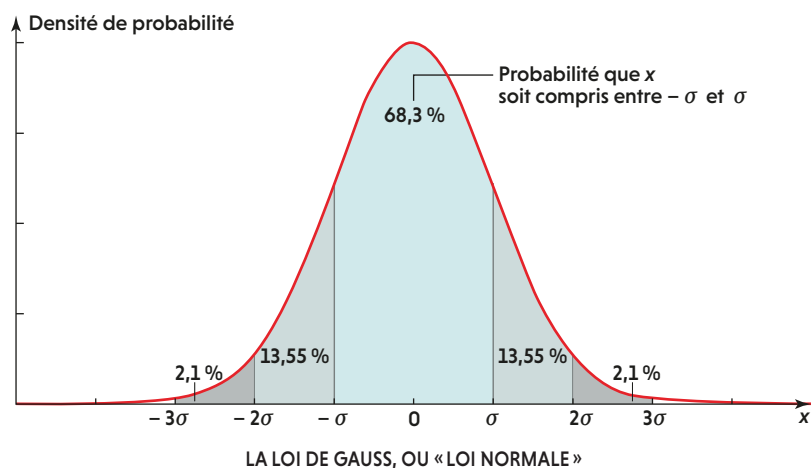
Dernier exemple, mais d'une grande importance: la mécanique quantique, dont la formulation qu'en avait donnée en 1925 le physicien allemand Werner Heisenberg a pour nom la «mécanique des matrices». Considérons un objet physique soumis à des interactions et pouvant occuper différents états de base (qui peuvent être des positions dans l'espace pour une particule, des orbites autour d'un noyau atomique pour un électron, des fréquences pour une onde lumineuse, etc.). Son état quantique se décrit par une «somme» des différentes possibilités, une superposition des états de base, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient lié à la probabilité d'observer l'objet dans l'état de base en question lors d'une mesure.

Autrement dit, à chaque instant, l'état quantique de l'objet est une liste de nombres (en général, il s'agit de nombres complexes): les coefficients associés à la probabilité d'occuper l'état de base 1, l'état de base 2, l'état de base 3, etc. L'état quantique est donc représenté par un vecteur dont la dimension est le nombre d'états de base possibles (ce nombre est souvent très grand, voire infini).

Cet état quantique évolue au cours du temps sous l'effet des interactions. D'après les lois de la physique quantique, cette évolution temporelle est régie par un opérateur linéaire nommé hamiltonien; la matrice qui le représente caractérise l'ensemble des interactions agissant sur l'objet, et transforme à chaque instant l'état du système en un autre.

L'opérateur hamiltonien est par ailleurs lié à une grandeur cruciale: l'énergie du système. Plus précisément, les valeurs possibles de cette énergie – les niveaux d'énergie du système – sont données par le «spectre» du hamiltonien. De quoi s'agit-il? Ce n'est ni un fantôme ni une organisation secrète que combat James Bond. Le spectre d'une matrice est un ensemble de nombres nommés *valeurs propres* et qui lui sont caractéristiques.

Ces notions étant fondamentales pour la suite de notre propos, détaillons-les un peu. Donnons-nous une matrice carrée M , qui représente des transformations linéaires entre vecteurs de même dimension. Pour un vecteur d'entrée e arbitraire, le vecteur de sortie $s = Me$ est généralement très différent de e . Mais pour



Cette loi de probabilité, proportionnelle à $\exp(-x^2/2\sigma)$ où x est l'écart à la moyenne et σ est l'écart-type, décrit une multitude de phénomènes de nature aléatoire. C'est elle que, dans les années 1950, Eugene Wigner a choisie pour définir les matrices aléatoires et les étudier: les nombres qui les composent sont tirés au hasard selon la loi de Gauss centrée sur 0.