

Les matrices, dont l'étude générale a été entreprise au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle avec les mathématiciens anglais Arthur Cayley et James Sylvester, sont l'un des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Comme on l'a dit, c'est un outil mathématique omniprésent. Donnons-en quelques illustrations.

## LES MATRICES, DES OUTILS MULTITÂCHES

Un premier exemple est celui d'un comparateur de prix. Imaginons deux magasins qui vendent les mêmes quatre produits. Plaçons dans une matrice de dimension  $2 \times 4$  les prix de chaque produit pour chaque magasin. Comme vecteur d'entrée, considérons une liste de courses: un vecteur de dimension 4 contenant les quantités désirées de chacun des quatre produits. Le vecteur de sortie, de dimension 2, est le montant total à payer pour cette liste de courses dans chacun des deux magasins, ce qui permet de comparer les prix.

De la même façon, en finances, on peut représenter par une matrice un courtier qui gère  $m$  portefeuilles contenant  $n$  types d'actions: on range dans une matrice de dimension  $m \times n$  les nombres de chaque type d'action détenus dans chaque portefeuille. Le vecteur d'entrée étant choisi chaque jour comme la liste des valeurs des gains (éventuellement négatifs) de chaque action, le vecteur de sortie est la liste des gains de chaque portefeuille.

La transmission des ondes et des signaux est également souvent décrite par des matrices. Supposons, pour simplifier, qu'une onde parvenant au transmetteur soit composée de trois fréquences possibles,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . On représente alors cette onde par un vecteur de dimension 3, qui est la liste des poids respectifs des trois fréquences. Par exemple, le vecteur  $(1/8, 1/2, 3/8)$

figurera une onde où la fréquence  $f_1$  est présente avec un poids de  $1/8$  (ou 12,5%),  $f_2$  avec un poids de  $1/2$  et  $f_3$  avec un poids de  $3/8$ .

L'action du transmetteur serait de modifier la répartition de l'énergie de l'onde sur les trois fréquences, c'est-à-dire de modifier les poids des fréquences. Une telle modification est généralement linéaire et se représente donc par une «matrice de transmission» de dimension  $3 \times 3$ . L'onde transmise sera par conséquent représentée par le vecteur égal au produit de cette matrice par le vecteur figurant l'onde incidente.

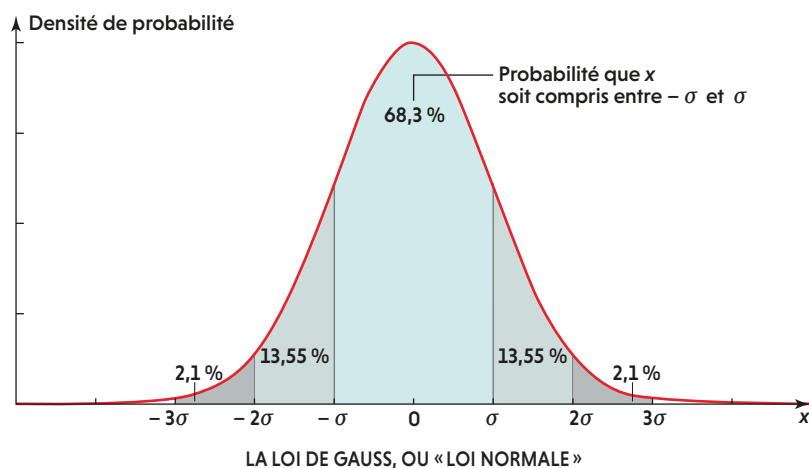
Dernier exemple, mais d'une grande importance: la mécanique quantique, dont la formulation qu'en avait donnée en 1925 le physicien allemand Werner Heisenberg a pour nom la «mécanique des matrices». Considérons un objet physique soumis à des interactions et pouvant occuper différents états de base (qui peuvent être des positions dans l'espace pour une particule, des orbites autour d'un noyau atomique pour un électron, des fréquences pour une onde lumineuse, etc.). Son état quantique se décrit par une «somme» des différentes possibilités, une superposition des états de base, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient lié à la probabilité d'observer l'objet dans l'état de base en question lors d'une mesure.

Autrement dit, à chaque instant, l'état quantique de l'objet est une liste de nombres (en général, il s'agit de nombres complexes): les coefficients associés à la probabilité d'occuper l'état de base 1, l'état de base 2, l'état de base 3, etc. L'état quantique est donc représenté par un vecteur dont la dimension est le nombre d'états de base possibles (ce nombre est souvent très grand, voire infini).

Cet état quantique évolue au cours du temps sous l'effet des interactions. D'après les lois de la physique quantique, cette évolution temporelle est régie par un opérateur linéaire nommé hamiltonien; la matrice qui le représente caractérise l'ensemble des interactions agissant sur l'objet, et transforme à chaque instant l'état du système en un autre.

L'opérateur hamiltonien est par ailleurs lié à une grandeur cruciale: l'énergie du système. Plus précisément, les valeurs possibles de cette énergie – les niveaux d'énergie du système – sont données par le «spectre» du hamiltonien. De quoi s'agit-il? Ce n'est ni un fantôme ni une organisation secrète que combat James Bond. Le spectre d'une matrice est un ensemble de nombres nommés *valeurs propres* et qui lui sont caractéristiques.

Ces notions étant fondamentales pour la suite de notre propos, détaillons-les un peu. Donnons-nous une matrice carrée  $M$ , qui représente des transformations linéaires entre vecteurs de même dimension. Pour un vecteur d'entrée  $e$  arbitraire, le vecteur de sortie  $s = Me$  est généralement très différent de  $e$ . Mais pour



Cette loi de probabilité, proportionnelle à  $\exp(-x^2/2\sigma)$  où  $x$  est l'écart à la moyenne et  $\sigma$  est l'écart-type, décrit une multitude de phénomènes de nature aléatoire. C'est elle que, dans les années 1950, Eugene Wigner a choisie pour définir les matrices aléatoires et les étudier: les nombres qui les composent sont tirés au hasard selon la loi de Gauss centrée sur 0.



➤ certains vecteurs d'entrée particuliers, qu'on nomme alors *vecteurs propres*, la sortie est proportionnelle à l'entrée. En d'autres termes, pour certains vecteurs  $v$ , on a  $Mv = \lambda v$ , où  $\lambda$  (lambda) est un simple nombre. Ce facteur  $\lambda$  de proportionnalité est alors qualifié de *valeur propre* de la matrice, et  $v$  est un vecteur propre associé. Pour le vecteur propre  $v$  (et tous ceux qui lui sont proportionnels), tout se passe comme si l'on pouvait remplacer la matrice par la multiplication par le nombre  $\lambda$  (voir l'encadré page 41). C'est en ce sens qu'une valeur propre est caractéristique de la matrice.

On démontre qu'une matrice carrée  $M$  de dimension  $n \times n$  possède  $n$  valeurs propres (parfois non distinctes, auquel cas les valeurs propres identiques sont associées à des vecteurs propres différents), et le spectre de  $M$  est l'ensemble de ces  $n$  valeurs propres. On démontre aussi que les valeurs propres sont des nombres réels si la matrice est symétrique (et composée de nombres réels) ou si elle est hermitienne (voir l'encadré page 36). Sinon, ce sont souvent des nombres complexes.

Les spectres des opérateurs linéaires, et en particulier du hamiltonien associé à un système, jouent un rôle très important en physique (voir l'encadré page 42). Il est donc utile de les déterminer, et il existe des algorithmes ou des logiciels pour calculer numériquement le spectre de n'importe quelle matrice donnée. Cependant, la question qui nous intéresse dans le cadre des matrices aléatoires n'est pas le

calcul du spectre, mais la suivante: à quoi ressemble, en moyenne, le spectre d'une matrice?

C'est là qu'entrent en scène les travaux de Wigner du début des années 1950. À cette époque où il y avait une course à l'énergie nucléaire, on s'intéressait beaucoup aux niveaux d'énergie des noyaux atomiques, c'est-à-dire aux spectres de leurs hamiltoniens.

Les noyaux les plus légers, comme celui du deutérium, composé d'un proton et d'un neutron, ont un hamiltonien simple, et les physiciens savaient calculer leur spectre, au moins de façon approximative.

## DES NOYAUX LOURDS AUX MATRICES ALÉATOIRES

En revanche, les noyaux lourds, comme celui de l'uranium 238, composé de 238 protons et neutrons, ont un hamiltonien d'une trop grande complexité pour que l'on puisse calculer leur spectre. Cependant, ces spectres peuvent être déterminés expérimentalement en envoyant sur les noyaux des faisceaux de neutrons, et en mesurant à quelles énergies ces faisceaux sont fortement déviés. Ainsi, les expériences des années 1950 ont exploré de vastes gammes d'énergie et permis de trouver des centaines de pics de diffusion des neutrons, correspondant aux niveaux d'énergie excités des noyaux.

Pour chaque noyau, les positions de ces pics dessinaient un ensemble très complexe. Renonçant à comprendre les valeurs exactes des niveaux d'énergie, Wigner s'est intéressé à

Une étude sur la distribution statistique des temps d'attente entre deux métros successifs à New York a été publiée en 2017 par Aukosh Jagannath (université de Toronto) et Thomas Trogdon (université de Californie à Irvine). Elle montre que les statistiques des matrices aléatoires décrivent en partie cette distribution.