



> certains vecteurs d'entrée particuliers, qu'on nomme alors *vecteurs propres*, la sortie est proportionnelle à l'entrée. En d'autres termes, pour certains vecteurs v , on a $Mv = \lambda v$, où λ (lambda) est un simple nombre. Ce facteur λ de proportionnalité est alors qualifié de *valeur propre* de la matrice, et v est un vecteur propre associé. Pour le vecteur propre v (et tous ceux qui lui sont proportionnels), tout se passe comme si l'on pouvait remplacer la matrice par la multiplication par le nombre λ (voir l'encadré page 41). C'est en ce sens qu'une valeur propre est caractéristique de la matrice.

On démontre qu'une matrice carrée M de dimension $n \times n$ possède n valeurs propres (parfois non distinctes, auquel cas les valeurs propres identiques sont associées à des vecteurs propres différents), et le spectre de M est l'ensemble de ces n valeurs propres. On démontre aussi que les valeurs propres sont des nombres réels si la matrice est symétrique (et composée de nombres réels) ou si elle est hermitienne (voir l'encadré page 36). Sinon, ce sont souvent des nombres complexes.

Les spectres des opérateurs linéaires, et en particulier du hamiltonien associé à un système, jouent un rôle très important en physique (voir l'encadré page 42). Il est donc utile de les déterminer, et il existe des algorithmes ou des logiciels pour calculer numériquement le spectre de n'importe quelle matrice donnée. Cependant, la question qui nous intéresse dans le cadre des matrices aléatoires n'est pas le

calcul du spectre, mais la suivante: à quoi ressemble, en moyenne, le spectre d'une matrice?

C'est là qu'entrent en scène les travaux de Wigner du début des années 1950. À cette époque où il y avait une course à l'énergie nucléaire, on s'intéressait beaucoup aux niveaux d'énergie des noyaux atomiques, c'est-à-dire aux spectres de leurs hamiltoniens.

Les noyaux les plus légers, comme celui du deutérium, composé d'un proton et d'un neutron, ont un hamiltonien simple, et les physiciens savaient calculer leur spectre, au moins de façon approximative.

DES NOYAUX LOURDS AUX MATRICES ALÉATOIRES

En revanche, les noyaux lourds, comme celui de l'uranium 238, composé de 238 protons et neutrons, ont un hamiltonien d'une trop grande complexité pour que l'on puisse calculer leur spectre. Cependant, ces spectres peuvent être déterminés expérimentalement en envoyant sur les noyaux des faisceaux de neutrons, et en mesurant à quelles énergies ces faisceaux sont fortement déviés. Ainsi, les expériences des années 1950 ont exploré de vastes gammes d'énergie et permis de trouver des centaines de pics de diffusion des neutrons, correspondant aux niveaux d'énergie excités des noyaux.

Pour chaque noyau, les positions de ces pics dessinaient un ensemble très complexe. Renonçant à comprendre les valeurs exactes des niveaux d'énergie, Wigner s'est intéressé à

Une étude sur la distribution statistique des temps d'attente entre deux métros successifs à New York a été publiée en 2017 par Aukosh Jagannath (université de Toronto) et Thomas Trogdon (université de Californie à Irvine). Elle montre que les statistiques des matrices aléatoires décrivent en partie cette distribution.

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Généralement, une matrice représente une application linéaire agissant sur des vecteurs. Une application linéaire f est une fonction qui vérifie $f(a v_1 + b v_2) = a f(v_1) + b f(v_2)$ quels que soient les nombres a et b et les vecteurs v_1 et v_2 . Si les vecteurs v considérés sont de dimension n et si les $f(v)$ sont des vecteurs de dimension m , l'application linéaire f peut être représentée par une matrice de dimension $m \times n$. Une matrice carrée, de dimension $n \times n$, représente souvent une application linéaire qui transforme des vecteurs d'un certain espace en d'autres vecteurs du même espace.

Par exemple, la matrice de dimension 2×4 :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

représente une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension 4 en vecteurs de dimension 2. Ainsi, le vecteur

$$e = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

est transformé en

$$s = Me = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Cette opération s'effectue en « multipliant » la première (respectivement deuxième) ligne de M par la colonne de e pour obtenir la première (respectivement deuxième) composante de s . Plus précisément, la première composante de s est égale à :

$$(-2) \times 4 + 0 \times 5 + (-1) \times 1 + (-1) \times 15 = -24,$$

tandis que la deuxième composante de s est égale à :

$$2 \times 4 + 2 \times 5 + 4 \times 1 + 1 \times 15 = 37.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

chaque nombre du triangle supérieur de la matrice est choisi au hasard indépendamment des autres nombres, mais tous selon la même loi de probabilité, la loi de Gauss, ou « loi normale » (voir la figure page 37). Quant aux nombres qui remplissent le triangle inférieur de la matrice, ils sont déterminés par ceux du triangle supérieur, afin que la matrice soit symétrique.

Le physicien américain Freeman Dyson (un collègue de Wigner), et deux physiciens du CEA, Madan Lal Mehta et Michel Gaudin, purent alors calculer la courbe de répartition théorique des espacements entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire, dans la limite où la dimension de la matrice est grande et tend vers l'infini. Cette courbe est celle que Freeman Dyson nota GOE (pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*) et qui s'accorde très bien avec l'histogramme des écarts d'énergie d'un noyau lourd, mesurés par diffusion de neutrons (voir la figure page 40).

C'est cette remarquable découverte qui donna le coup d'envoi à la théorie des matrices aléatoires. Depuis, des chercheurs ont repris la méthode de Wigner et l'ont étendue à toutes sortes de matrices (symétriques ou non, hermitiennes ou non, ou avec d'autres types de symétries) et de lois de probabilité (autres que la loi de Gauss), en vue d'applications à des problèmes de physique, de mathématiques, d'économie, de télécommunications, de biologie...

Dans tous les cas, il s'agit de choisir une classe de matrices de grande dimension, dont les éléments sont tirés au hasard selon une certaine loi de probabilité, et de déterminer la répartition statistique de leurs valeurs propres. L'un des résultats majeurs auxquels ont abouti ces recherches est ce qu'on appelle l'universalité.

DES LOIS STATISTIQUES QUI NE DÉPENDENT QUE DES SYMÉTRIES

La propriété d'universalité est que la statistique des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire de grande dimension ne dépend pas de la loi de probabilité utilisée pour choisir les nombres de la matrice ! Elle dépend seulement des symétries des matrices considérées (par exemple symétriques ou pas, hermitiennes ou pas...).

Démontrer l'universalité, pour une classe donnée de matrices aléatoires, est aujourd'hui l'une des principales activités des mathématiciens probabilistes du domaine. Les preuves ne sont jamais faciles, mais à chaque fois la statistique des écarts entre valeurs propres se révèle universelle. L'idée intuitive est que chaque valeur propre est une fonction très compliquée de tous les nombres qui composent la matrice, et, quand la dimension de la matrice tend vers l'infini, la complexité s'efface et fait apparaître une moyenne, un peu ➤