

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Généralement, une matrice représente une application linéaire agissant sur des vecteurs. Une application linéaire f est une fonction qui vérifie $f(a v_1 + b v_2) = a f(v_1) + b f(v_2)$ quels que soient les nombres a et b et les vecteurs v_1 et v_2 . Si les vecteurs v considérés sont de dimension n et si les $f(v)$ sont des vecteurs de dimension m , l'application linéaire f peut être représentée par une matrice de dimension $m \times n$. Une matrice carrée, de dimension $n \times n$, représente souvent une application linéaire qui transforme des vecteurs d'un certain espace en d'autres vecteurs du même espace.

Par exemple, la matrice de dimension 2×4 :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

représente une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension 4 en vecteurs de dimension 2. Ainsi, le vecteur

$$e = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

est transformé en

$$s = Me = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Cette opération s'effectue en « multipliant » la première (respectivement deuxième) ligne de M par la colonne de e pour obtenir la première (respectivement deuxième) composante de s . Plus précisément, la première composante de s est égale à :

$$(-2) \times 4 + 0 \times 5 + (-1) \times 1 + (-1) \times 15 = -24,$$

tandis que la deuxième composante de s est égale à :

$$2 \times 4 + 2 \times 5 + 4 \times 1 + 1 \times 15 = 37.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

leur répartition statistique. En traçant l'histogramme des écarts entre pics successifs, il a découvert une propriété remarquable : cet histogramme était à peu près le même pour différents noyaux (uranium 238, thorium 232, cadmium 110, erbium 166...) et s'ajustait à une courbe, qui sera nommée plus tard GOE. Pour certains noyaux, l'histogramme correspondait à une courbe différente (nommée GUE), et pour d'autres, dotés de propriétés magnétiques, l'histogramme tendait vers une troisième courbe (nommée GSE).

Wigner eut une idée : puisque le hamiltonien d'un noyau lourd est une grande matrice très compliquée, peut-être son spectre est-il assez proche de celui d'une matrice de très grande dimension et dont les éléments sont tirés au hasard ? Il entreprit donc de calculer de façon théorique le spectre moyen et les écarts entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire.

Au préalable, il fallait préciser ce que signifie choisir au hasard les nombres qui composent la matrice. En effet, il existe de nombreuses sortes de hasard ou façons de faire des choix aléatoires. Wigner a considéré le type de hasard suivant :

chaque nombre du triangle supérieur de la matrice est choisi au hasard indépendamment des autres nombres, mais tous selon la même loi de probabilité, la loi de Gauss, ou « loi normale » (voir la figure page 37). Quant aux nombres qui remplissent le triangle inférieur de la matrice, ils sont déterminés par ceux du triangle supérieur, afin que la matrice soit symétrique.

Le physicien américain Freeman Dyson (un collègue de Wigner), et deux physiciens du CEA, Madan Lal Mehta et Michel Gaudin, purent alors calculer la courbe de répartition théorique des espacements entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire, dans la limite où la dimension de la matrice est grande et tend vers l'infini. Cette courbe est celle que Freeman Dyson nota GOE (pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*) et qui s'accorde très bien avec l'histogramme des écarts d'énergie d'un noyau lourd, mesurés par diffusion de neutrons (voir la figure page 40).

C'est cette remarquable découverte qui donna le coup d'envoi à la théorie des matrices aléatoires. Depuis, des chercheurs ont repris la méthode de Wigner et l'ont étendue à toutes sortes de matrices (symétriques ou non, hermitiennes ou non, ou avec d'autres types de symétries) et de lois de probabilité (autres que la loi de Gauss), en vue d'applications à des problèmes de physique, de mathématiques, d'économie, de télécommunications, de biologie...

Dans tous les cas, il s'agit de choisir une classe de matrices de grande dimension, dont les éléments sont tirés au hasard selon une certaine loi de probabilité, et de déterminer la répartition statistique de leurs valeurs propres. L'un des résultats majeurs auxquels ont abouti ces recherches est ce qu'on appelle l'universalité.

DES LOIS STATISTIQUES QUI NE DÉPENDENT QUE DES SYMÉTRIES

La propriété d'universalité est que la statistique des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire de grande dimension ne dépend pas de la loi de probabilité utilisée pour choisir les nombres de la matrice ! Elle dépend seulement des symétries des matrices considérées (par exemple symétriques ou pas, hermitiennes ou pas...).

Démontrer l'universalité, pour une classe donnée de matrices aléatoires, est aujourd'hui l'une des principales activités des mathématiciens probabilistes du domaine. Les preuves ne sont jamais faciles, mais à chaque fois la statistique des écarts entre valeurs propres se révèle universelle. L'idée intuitive est que chaque valeur propre est une fonction très compliquée de tous les nombres qui composent la matrice, et, quand la dimension de la matrice tend vers l'infini, la complexité s'efface et fait apparaître une moyenne, un peu >