

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Généralement, une matrice représente une application linéaire agissant sur des vecteurs. Une application linéaire f est une fonction qui vérifie $f(a v_1 + b v_2) = a f(v_1) + b f(v_2)$ quels que soient les nombres a et b et les vecteurs v_1 et v_2 . Si les vecteurs v considérés sont de dimension n et si les $f(v)$ sont des vecteurs de dimension m , l'application linéaire f peut être représentée par une matrice de dimension $m \times n$. Une matrice carrée, de dimension $n \times n$, représente souvent une application linéaire qui transforme des vecteurs d'un certain espace en d'autres vecteurs du même espace.

Par exemple, la matrice de dimension 2×4 :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

représente une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension 4 en vecteurs de dimension 2. Ainsi, le vecteur

$$e = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

est transformé en

$$s = Me = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Cette opération s'effectue en « multipliant » la première (respectivement deuxième) ligne de M par la colonne de e pour obtenir la première (respectivement deuxième) composante de s . Plus précisément, la première composante de s est égale à :

$$(-2) \times 4 + 0 \times 5 + (-1) \times 1 + (-1) \times 15 = -24,$$

tandis que la deuxième composante de s est égale à :

$$2 \times 4 + 2 \times 5 + 4 \times 1 + 1 \times 15 = 37.$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

leur répartition statistique. En traçant l'histogramme des écarts entre pics successifs, il a découvert une propriété remarquable : cet histogramme était à peu près le même pour différents noyaux (uranium 238, thorium 232, cadmium 110, erbium 166...) et s'ajustait à une courbe, qui sera nommée plus tard GOE. Pour certains noyaux, l'histogramme correspondait à une courbe différente (nommée GUE), et pour d'autres, dotés de propriétés magnétiques, l'histogramme tendait vers une troisième courbe (nommée GSE).

Wigner eut une idée : puisque le hamiltonien d'un noyau lourd est une grande matrice très compliquée, peut-être son spectre est-il assez proche de celui d'une matrice de très grande dimension et dont les éléments sont tirés au hasard ? Il entreprit donc de calculer de façon théorique le spectre moyen et les écarts entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire.

Au préalable, il fallait préciser ce que signifie choisir au hasard les nombres qui composent la matrice. En effet, il existe de nombreuses sortes de hasard ou façons de faire des choix aléatoires. Wigner a considéré le type de hasard suivant :

chaque nombre du triangle supérieur de la matrice est choisi au hasard indépendamment des autres nombres, mais tous selon la même loi de probabilité, la loi de Gauss, ou « loi normale » (voir la figure page 37). Quant aux nombres qui remplissent le triangle inférieur de la matrice, ils sont déterminés par ceux du triangle supérieur, afin que la matrice soit symétrique.

Le physicien américain Freeman Dyson (un collègue de Wigner), et deux physiciens du CEA, Madan Lal Mehta et Michel Gaudin, purent alors calculer la courbe de répartition théorique des espacements entre valeurs propres d'une telle matrice aléatoire, dans la limite où la dimension de la matrice est grande et tend vers l'infini. Cette courbe est celle que Freeman Dyson nota GOE (pour *Gaussian Orthogonal Ensemble*) et qui s'accorde très bien avec l'histogramme des écarts d'énergie d'un noyau lourd, mesurés par diffusion de neutrons (voir la figure page 40).

C'est cette remarquable découverte qui donna le coup d'envoi à la théorie des matrices aléatoires. Depuis, des chercheurs ont repris la méthode de Wigner et l'ont étendue à toutes sortes de matrices (symétriques ou non, hermitiennes ou non, ou avec d'autres types de symétries) et de lois de probabilité (autres que la loi de Gauss), en vue d'applications à des problèmes de physique, de mathématiques, d'économie, de télécommunications, de biologie...

Dans tous les cas, il s'agit de choisir une classe de matrices de grande dimension, dont les éléments sont tirés au hasard selon une certaine loi de probabilité, et de déterminer la répartition statistique de leurs valeurs propres. L'un des résultats majeurs auxquels ont abouti ces recherches est ce qu'on appelle l'universalité.

DES LOIS STATISTIQUES QUI NE DÉPENDENT QUE DES SYMÉTRIES

La propriété d'universalité est que la statistique des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire de grande dimension ne dépend pas de la loi de probabilité utilisée pour choisir les nombres de la matrice ! Elle dépend seulement des symétries des matrices considérées (par exemple symétriques ou pas, hermitiennes ou pas...).

Démontrer l'universalité, pour une classe donnée de matrices aléatoires, est aujourd'hui l'une des principales activités des mathématiciens probabilistes du domaine. Les preuves ne sont jamais faciles, mais à chaque fois la statistique des écarts entre valeurs propres se révèle universelle. L'idée intuitive est que chaque valeur propre est une fonction très compliquée de tous les nombres qui composent la matrice, et, quand la dimension de la matrice tend vers l'infini, la complexité s'efface et fait apparaître une moyenne, un peu ➤

► comme un mélange d'un grand nombre de particules devient homogène si on le secoue bien.

Puisque la statistique est universelle, elle est la même que celle trouvée par Wigner avec la loi de Gauss. Eugene Wigner et Freeman Dyson ont en fait considéré trois cas : les matrices symétriques, les matrices hermitiennes et les matrices quaternioniques, ces dernières ayant des symétries correspondant à celles du magnétisme. Les trois distributions statistiques correspondantes et qui sont universelles sont désormais respectivement appelées les distributions GOE, GUE (pour *Gaussian Unitary Ensemble*) et GSE (pour *Gaussian Symplectic Ensemble*) de Wigner. Depuis, d'autres distributions universelles, correspondant à d'autres symétries, ont été découvertes.

De façon étonnante, les scientifiques ont retrouvé un peu partout ces distributions universelles. Un exemple concerne le temps d'attente, à un arrêt, entre deux bus successifs. En 2000, deux physiciens tchèques, Milan Krbálek et Petr Šeba, ont étudié ce temps d'attente à Cuernavaca, au Mexique. Dans cette localité, il n'y a pas de compagnie de transport : chaque chauffeur est propriétaire de son bus. Grâce à des observateurs auxquels il donne un pourboire, chaque chauffeur peut savoir si le bus qui le précède est passé depuis longtemps ou non ; il peut donc décider d'accélérer ou ralentir, en vue de ramasser le plus de passagers possible. Or Milan Krbálek et Petr Šeba ont montré que l'histogramme des écarts de temps entre deux bus successifs obéit à la distribution d'écarts GUE de Wigner !

En 2007, Petr Šeba a également étudié la statistique de l'espacement entre voitures

Les espacements entre voitures garées obéissent aussi à une distribution de Wigner

stationnées l'une derrière l'autre le long d'un trottoir. Son modèle théorique et les quelques données qu'il a recueillies dans Hradec Králové, la ville de son université, ont montré que ces espacements entre voitures obéissent eux aussi à une distribution de Wigner.

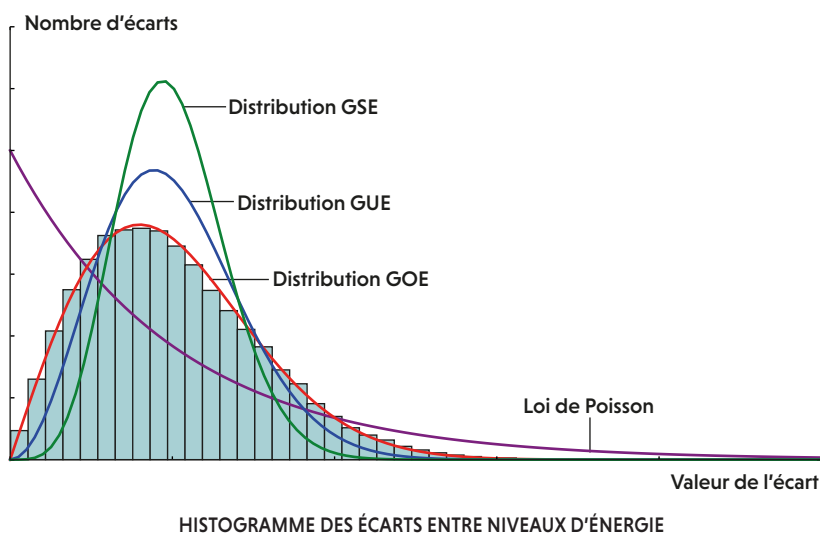
Et ces exemples ne sont pas les seuls. De telles distributions ont été mises en évidence par divers chercheurs dans la statistique des temps d'arrivée des métros à New York, dans celle des distances entre arbres d'une forêt primaire (non plantée par l'homme), dans celle des fluctuations des cours boursiers, dans celle des connexions entre neurones, etc.

Le plus souvent, on est loin de comprendre pourquoi une distribution statistique issue des matrices aléatoires intervient dans le phénomène étudié. Une illustration frappante de cette énigme est en rapport avec les nombres premiers (entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes).

UNE PISTE POUR PROUVER L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN ?

En 1891, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduisit une fonction aujourd'hui nommée fonction zêta de Riemann, définie sur le plan, et qui s'annule en un nombre infini de points, les « zéros » de la fonction. La connaissance de la répartition de ces zéros permet d'analyser avec une grande précision comment se distribuent les nombres premiers parmi les entiers. Riemann énonça la célèbre conjecture que tous ces zéros (hormis les zéros « triviaux », les entiers négatifs pairs) sont alignés sur une droite précise, mais il ne put jamais la prouver, ni personne depuis.

En 1972, à l'Institut d'études avancées de Princeton, aux États-Unis, Hugh Montgomery, mathématicien spécialiste des nombres premiers, eut une discussion fortuite avec Freeman Dyson. À cette occasion, les deux chercheurs remarquèrent que l'histogramme des distances entre les zéros non triviaux de la



Pour certains noyaux atomiques lourds, l'histogramme des écarts entre deux niveaux d'énergie successifs ressemble à celui montré ci-dessus. Il est très proche de la distribution GOE de Wigner, courbe qui correspond à l'histogramme des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire (de type GOE) dont la dimension tend vers l'infini. Les distributions GUE et GSE de Wigner (également liées aux matrices aléatoires), ainsi que la loi de Poisson (une distribution statistique répandue), sont montrées à titre de comparaison.