

> comme un mélange d'un grand nombre de particules devient homogène si on le secoue bien.

Puisque la statistique est universelle, elle est la même que celle trouvée par Wigner avec la loi de Gauss. Eugene Wigner et Freeman Dyson ont en fait considéré trois cas: les matrices symétriques, les matrices hermitiennes et les matrices quaternioniques, ces dernières ayant des symétries correspondant à celles du magnétisme. Les trois distributions statistiques correspondantes et qui sont universelles sont désormais respectivement appelées les distributions GOE, GUE (pour *Gaussian Unitary Ensemble*) et GSE (pour *Gaussian Symplectic Ensemble*) de Wigner. Depuis, d'autres distributions universelles, correspondant à d'autres symétries, ont été découvertes.

De façon étonnante, les scientifiques ont retrouvé un peu partout ces distributions universelles. Un exemple concerne le temps d'attente, à un arrêt, entre deux bus successifs. En 2000, deux physiciens tchèques, Milan Krbálek et Petr Šeba, ont étudié ce temps d'attente à Cuernavaca, au Mexique. Dans cette localité, il n'y a pas de compagnie de transport: chaque chauffeur est propriétaire de son bus. Grâce à des observateurs auxquels il donne un pourboire, chaque chauffeur peut savoir si le bus qui le précède est passé depuis longtemps ou non; il peut donc décider d'accélérer ou ralentir, en vue de ramasser le plus de passagers possible. Or Milan Krbálek et Petr Šeba ont montré que l'histogramme des écarts de temps entre deux bus successifs obéit à la distribution d'écarts GUE de Wigner!

En 2007, Petr Šeba a également étudié la statistique de l'espacement entre voitures

Les espacements entre voitures garées obéissent aussi à une distribution de Wigner

stationnées l'une derrière l'autre le long d'un trottoir. Son modèle théorique et les quelques données qu'il a recueillies dans Hradec Králové, la ville de son université, ont montré que ces espacements entre voitures obéissent eux aussi à une distribution de Wigner.

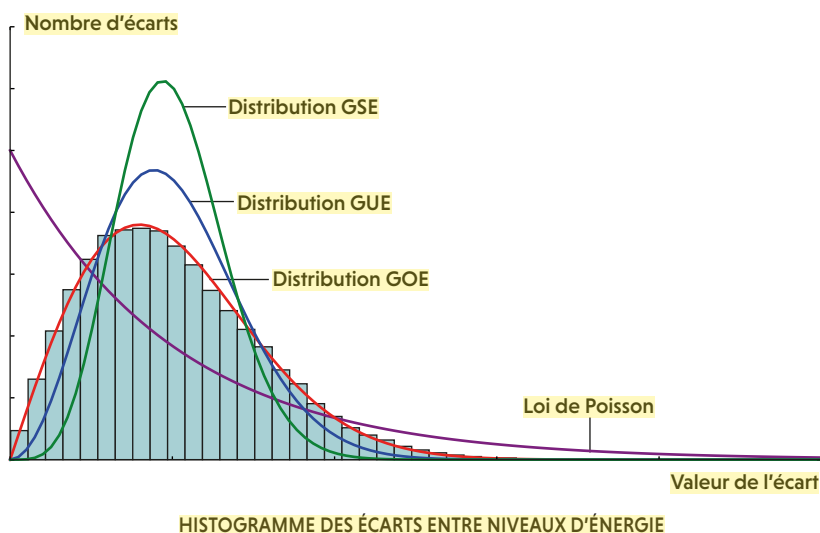
Et ces exemples ne sont pas les seuls. De telles distributions ont été mises en évidence par divers chercheurs dans la statistique des temps d'arrivée des métros à New York, dans celle des distances entre arbres d'une forêt primaire (non plantée par l'homme), dans celle des fluctuations des cours boursiers, dans celle des connexions entre neurones, etc.

Le plus souvent, on est loin de comprendre pourquoi une distribution statistique issue des matrices aléatoires intervient dans le phénomène étudié. Une illustration frappante de cette énigme est en rapport avec les nombres premiers (entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes).

UNE PISTE POUR PROUVER L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN ?

En 1891, le mathématicien allemand Bernhard Riemann introduisit une fonction aujourd'hui nommée fonction zêta de Riemann, définie sur le plan, et qui s'annule en un nombre infini de points, les «zéros» de la fonction. La connaissance de la répartition de ces zéros permet d'analyser avec une grande précision comment se distribuent les nombres premiers parmi les entiers. Riemann énonça la célèbre conjecture que tous ces zéros (hormis les zéros «triviaux», les entiers négatifs pairs) sont alignés sur une droite précise, mais il ne put jamais la prouver, ni personne depuis.

En 1972, à l'Institut d'études avancées de Princeton, aux États-Unis, Hugh Montgomery, mathématicien spécialiste des nombres premiers, eut une discussion fortuite avec Freeman Dyson. À cette occasion, les deux chercheurs remarquèrent que l'histogramme des distances entre les zéros non triviaux de la



Pour certains noyaux atomiques lourds, l'histogramme des écarts entre deux niveaux d'énergie successifs ressemble à celui montré ci-dessus. Il est très proche de la distribution GOE de Wigner, courbe qui correspond à l'histogramme des écarts entre valeurs propres d'une matrice aléatoire (de type GOE) dont la dimension tend vers l'infini. Les distributions GUE et GSE de Wigner (également liées aux matrices aléatoires), ainsi que la loi de Poisson (une distribution statistique répandue), sont montrées à titre de comparaison.

SPECTRE, VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Une matrice carrée M de dimension $n \times n$ peut être vue comme une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension n en d'autres, de même dimension.

Pour certains vecteurs v , la matrice M agit comme une simple multiplication par un nombre λ , c'est-à-dire $Mv = \lambda v$.

On dit alors que v est un vecteur propre de M , et λ est la valeur propre associée.

On démontre qu'une matrice $n \times n$ possède n vecteurs propres distincts (définis à un facteur de proportionnalité près), auxquels sont associées n valeurs propres (pas forcément toutes distinctes). L'ensemble des valeurs propres de M constitue le « spectre » de cette matrice.

À titre d'exemple, considérons la matrice 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on considère un vecteur quelconque, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

l'application de M conduit à un résultat qui ne ressemble pas du tout au vecteur dont on est parti :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En revanche, on a :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ainsi d'ailleurs que tous ses multiples) est vecteur propre de M avec la valeur propre 3. On peut aussi vérifier que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de M , le premier avec la valeur propre 1, le second avec la valeur propre 5. Le spectre de M est ainsi constitué des valeurs propres 1, 3 et 5, et ce sont les seules valeurs propres, puisque la matrice est de dimension 3×3 .

fonction zêta de Riemann (on en connaît aujourd'hui plusieurs milliers de milliards, calculés par ordinateur, et ils sont tous sur la droite conjecturée) est incroyablement bien décrit par la distribution GUE de Wigner.

À ce jour, cette extraordinaire concordance n'a pas reçu d'explication. L'énigme reste entière, et certains spécialistes considèrent d'ailleurs la piste des matrices aléatoires comme l'une des plus prometteuses pour prouver la conjecture de Riemann. Quel rapport y a-t-il entre la fonction zêta et une matrice ? Et de quelle matrice s'agirait-il ? À cette hypothétique et évasive matrice dont les valeurs propres seraient les zéros de la fonction zêta, les chercheurs ont donné le nom de « Riemannium », par analogie avec les noms des éléments ou noyaux atomiques. Mais à part son nom, on n'en sait pas beaucoup plus aujourd'hui...

L'universalité des propriétés des matrices aléatoires ne porte pas uniquement sur les espacements entre valeurs propres. Pour chaque tirage d'une matrice aléatoire, considérons sa plus grande valeur propre, et traçons l'histogramme des nombres ainsi obtenus. De nouveau, cet histogramme est universel pour les matrices de grande taille : il ne dépend pas de la loi de probabilité choisie pour remplir les matrices (mais il dépend de la classe de symétrie de ces matrices).

Cet histogramme s'ajuste sur une courbe dite de Tracy-Widom, introduite par les mathématiciens américains Craig Tracy et Harold Widom en 1993. Comme les distributions de Wigner sur les espacements des valeurs propres, celle de Tracy-Widom et ses variantes correspondant aux différentes classes de symétrie se retrouvent dans divers phénomènes étudiés en physique, en biologie, en économie... sans que l'on comprenne toujours bien pourquoi.

UNE LOI NON UNIVERSELLE POUR LA DENSITÉ SPECTRALE

Une autre propriété intéressante des matrices aléatoires porte sur la densité de leurs valeurs propres, ou « densité spectrale ». Il s'agit d'une fonction $p(x)$ qui indique la probabilité que x soit une valeur propre. Plus précisément, la probabilité qu'il y ait une valeur propre dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$, où Δx est très petit, est donnée par le produit $p(x) \Delta x$. Pour calculer en pratique cette densité $p(x)$, on peut procéder de la façon suivante. On prend un nombre x et un tout petit Δx , disons 0,01 ; on tire aléatoirement de nombreuses matrices, et pour chacune on compte combien de fois une valeur propre apparaît dans l'intervalle $[x, x + 0,01]$; on divise ce nombre d'occurrences par le nombre total de matrices tirées, et par la taille de l'intervalle, ici 0,01 ; le résultat est $p(x)$. On peut le voir comme la hauteur de la barre d'histogramme correspondant à x .

Si la loi de probabilité avec laquelle les matrices sont choisies est la loi de Gauss (centrée sur 0 et convenablement normalisée), Wigner a prouvé que plus la dimension des matrices est grande, plus l'histogramme ressemble à un « demi-cercle » (si l'échelle de l'axe vertical est appropriée) de rayon 2 (voir la figure page 44). Ainsi, la densité spectrale $p(x)$ est maximale en $x=0$, c'est-à-dire que beaucoup de valeurs propres sont proches de 0 ; plus x s'éloigne de 0, plus la densité diminue ; et la probabilité qu'il existe une valeur propre supérieure à 2 ou inférieure à -2 est à peu près nulle pour les matrices de grande taille.

Contrairement aux distributions de Wigner sur les écarts entre valeurs propres, le « demi-cercle de Wigner » n'est pas universel : si l'on choisit une autre loi de probabilité que la loi de Gauss, on obtient une autre forme limite pour la ➤