

SPECTRE, VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Une matrice carrée M de dimension $n \times n$ peut être vue comme une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension n en d'autres, de même dimension. Pour certains vecteurs v , la matrice M agit comme une simple multiplication par un nombre λ , c'est-à-dire $Mv = \lambda v$. On dit alors que v est un vecteur propre de M , et λ est la valeur propre associée. On démontre qu'une matrice $n \times n$ possède n vecteurs propres distincts (définis à un facteur de proportionnalité près), auxquels sont associées n valeurs propres (pas forcément toutes distinctes). L'ensemble des valeurs propres de M constitue le « spectre » de cette matrice. À titre d'exemple, considérons la matrice 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on considère un vecteur quelconque, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

l'application de M conduit à un résultat qui ne ressemble pas du tout au vecteur dont on est parti :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En revanche, on a :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ainsi d'ailleurs que tous ses multiples) est vecteur propre de M avec la valeur propre 3. On peut aussi vérifier que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de M , le premier avec la valeur propre 1, le second avec la valeur propre 5. Le spectre de M est ainsi constitué des valeurs propres 1, 3 et 5, et ce sont les seules valeurs propres, puisque la matrice est de dimension 3×3 .

fonction zêta de Riemann (on en connaît aujourd'hui plusieurs milliers de milliards, calculés par ordinateur, et ils sont tous sur la droite conjecturée) est incroyablement bien décrit par la distribution GUE de Wigner.

À ce jour, cette extraordinaire concordance n'a pas reçu d'explication. L'énigme reste entière, et certains spécialistes considèrent d'ailleurs la piste des matrices aléatoires comme l'une des plus prometteuses pour prouver la conjecture de Riemann. Quel rapport y a-t-il entre la fonction zêta et une matrice ? Et de quelle matrice s'agirait-il ? À cette hypothétique et évasive matrice dont les valeurs propres seraient les zéros de la fonction zêta, les chercheurs ont donné le nom de « Riemannium », par analogie avec les noms des éléments ou noyaux atomiques. Mais à part son nom, on n'en sait pas beaucoup plus aujourd'hui...

L'universalité des propriétés des matrices aléatoires ne porte pas uniquement sur les espacements entre valeurs propres. Pour chaque tirage d'une matrice aléatoire, considérons sa plus grande valeur propre, et traçons l'histogramme des nombres ainsi obtenus. De nouveau, cet histogramme est universel pour les matrices de grande taille : il ne dépend pas de la loi de probabilité choisie pour remplir les matrices (mais il dépend de la classe de symétrie de ces matrices).

Cet histogramme s'ajuste sur une courbe dite de Tracy-Widom, introduite par les mathématiciens américains Craig Tracy et Harold Widom en 1993. Comme les distributions de Wigner sur les espacements des valeurs propres, celle de Tracy-Widom et ses variantes correspondant aux différentes classes de symétrie se retrouvent dans divers phénomènes étudiés en physique, en biologie, en économie... sans que l'on comprenne toujours bien pourquoi.

UNE LOI NON UNIVERSELLE POUR LA DENSITÉ SPECTRALE

Une autre propriété intéressante des matrices aléatoires porte sur la densité de leurs valeurs propres, ou « densité spectrale ». Il s'agit d'une fonction $p(x)$ qui indique la probabilité que x soit une valeur propre. Plus précisément, la probabilité qu'il y ait une valeur propre dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$, où Δx est très petit, est donnée par le produit $p(x) \Delta x$. Pour calculer en pratique cette densité $p(x)$, on peut procéder de la façon suivante. On prend un nombre x et un tout petit Δx , disons 0,01 ; on tire aléatoirement de nombreuses matrices, et pour chacune on compte combien de fois une valeur propre apparaît dans l'intervalle $[x, x + 0,01]$; on divise ce nombre d'occurrences par le nombre total de matrices tirées, et par la taille de l'intervalle, ici 0,01 ; le résultat est $p(x)$. On peut le voir comme la hauteur de la barre d'histogramme correspondant à x .

Si la loi de probabilité avec laquelle les matrices sont choisies est la loi de Gauss (centrée sur 0 et convenablement normalisée), Wigner a prouvé que plus la dimension des matrices est grande, plus l'histogramme ressemble à un « demi-cercle » (si l'échelle de l'axe vertical est appropriée) de rayon 2 (voir la figure page 44). Ainsi, la densité spectrale $p(x)$ est maximale en $x=0$, c'est-à-dire que beaucoup de valeurs propres sont proches de 0 ; plus x s'éloigne de 0, plus la densité diminue ; et la probabilité qu'il existe une valeur propre supérieure à 2 ou inférieure à -2 est à peu près nulle pour les matrices de grande taille.

Contrairement aux distributions de Wigner sur les écarts entre valeurs propres, le « demi-cercle de Wigner » n'est pas universel : si l'on choisit une autre loi de probabilité que la loi de Gauss, on obtient une autre forme limite pour la