

## SPECTRE, VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

**U**ne matrice carrée  $M$  de dimension  $n \times n$  peut être vue comme une application linéaire qui transforme des vecteurs de dimension  $n$  en d'autres, de même dimension. Pour certains vecteurs  $v$ , la matrice  $M$  agit comme une simple multiplication par un nombre  $\lambda$ , c'est-à-dire  $Mv = \lambda v$ .

On dit alors que  $v$  est un vecteur propre de  $M$ , et  $\lambda$  est la valeur propre associée. On démontre qu'une matrice  $n \times n$  possède  $n$  vecteurs propres distincts (définis à un facteur de proportionnalité près), auxquels sont associées  $n$  valeurs propres (pas forcément toutes distinctes). L'ensemble des valeurs propres de  $M$  constitue le « spectre » de cette matrice.

À titre d'exemple, considérons la matrice  $3 \times 3$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on considère un vecteur quelconque, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

l'application de  $M$  conduit à un résultat qui ne ressemble pas du tout au vecteur dont on est parti :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En revanche, on a :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 6 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ainsi d'ailleurs que tous ses multiples) est vecteur propre de  $M$  avec la valeur propre 3. On peut aussi vérifier que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de  $M$ , le premier avec la valeur propre 1, le second avec la valeur propre 5. Le spectre de  $M$  est ainsi constitué des valeurs propres 1, 3 et 5, et ce sont les seules valeurs propres, puisque la matrice est de dimension  $3 \times 3$ .

fonction zêta de Riemann (on en connaît aujourd'hui plusieurs milliers de milliards, calculés par ordinateur, et ils sont tous sur la droite conjecturée) est incroyablement bien décrit par la distribution GUE de Wigner.

À ce jour, cette extraordinaire concordance n'a pas reçu d'explication. L'énigme reste entière, et certains spécialistes considèrent d'ailleurs la piste des matrices aléatoires comme l'une des plus prometteuses pour prouver la conjecture de Riemann. Quel rapport y a-t-il entre la fonction zêta et une matrice ? Et de quelle matrice s'agirait-il ? À cette hypothétique et évasive matrice dont les valeurs propres seraient les zéros de la fonction zêta, les chercheurs ont donné le nom de « Riemannium », par analogie avec les noms des éléments ou noyaux atomiques. Mais à part son nom, on n'en sait pas beaucoup plus aujourd'hui...

L'universalité des propriétés des matrices aléatoires ne porte pas uniquement sur les espacements entre valeurs propres. Pour chaque tirage d'une matrice aléatoire, considérons sa plus grande valeur propre, et traçons l'histogramme des nombres ainsi obtenus. De nouveau, cet histogramme est universel pour les matrices de grande taille : il ne dépend pas de la loi de probabilité choisie pour remplir les matrices (mais il dépend de la classe de symétrie de ces matrices).

Cet histogramme s'ajuste sur une courbe dite de Tracy-Widom, introduite par les mathématiciens américains Craig Tracy et Harold Widom en 1993. Comme les distributions de Wigner sur les espacements des valeurs propres, celle de Tracy-Widom et ses variantes correspondant aux différentes classes de symétrie se retrouvent dans divers phénomènes étudiés en physique, en biologie, en économie... sans que l'on comprenne toujours bien pourquoi.

## UNE LOI NON UNIVERSELLE POUR LA DENSITÉ SPECTRALE

Une autre propriété intéressante des matrices aléatoires porte sur la densité de leurs valeurs propres, ou « densité spectrale ». Il s'agit d'une fonction  $p(x)$  qui indique la probabilité que  $x$  soit une valeur propre. Plus précisément, la probabilité qu'il y ait une valeur propre dans l'intervalle  $[x, x + \Delta x]$ , où  $\Delta x$  est très petit, est donnée par le produit  $p(x) \Delta x$ . Pour calculer en pratique cette densité  $p(x)$ , on peut procéder de la façon suivante. On prend un nombre  $x$  et un tout petit  $\Delta x$ , disons 0,01 ; on tire aléatoirement de nombreuses matrices, et pour chacune on compte combien de fois une valeur propre apparaît dans l'intervalle  $[x, x + 0,01]$  ; on divise ce nombre d'occurrences par le nombre total de matrices tirées, et par la taille de l'intervalle, ici 0,01 ; le résultat est  $p(x)$ . On peut le voir comme la hauteur de la barre d'histogramme correspondant à  $x$ .

Si la loi de probabilité avec laquelle les matrices sont choisies est la loi de Gauss (centrée sur 0 et convenablement normalisée), Wigner a prouvé que plus la dimension des matrices est grande, plus l'histogramme ressemble à un « demi-cercle » (si l'échelle de l'axe vertical est appropriée) de rayon 2 (voir la figure page 44). Ainsi, la densité spectrale  $p(x)$  est maximale en  $x=0$ , c'est-à-dire que beaucoup de valeurs propres sont proches de 0 ; plus  $x$  s'éloigne de 0, plus la densité diminue ; et la probabilité qu'il existe une valeur propre supérieure à 2 ou inférieure à -2 est à peu près nulle pour les matrices de grande taille.

Contrairement aux distributions de Wigner sur les écarts entre valeurs propres, le « demi-cercle de Wigner » n'est pas universel : si l'on choisit une autre loi de probabilité que la loi de Gauss, on obtient une autre forme limite pour la

➤ densité spectrale. Cependant, Wigner, Dyson et d'autres ont progressivement découvert que pour toutes les lois cette forme limite est une courbe définie par des équations algébriques (équations ne faisant intervenir que des polynômes) et qu'il est possible de la prolonger en une surface (c'est l'unique surface qui a la même équation que la courbe, équation où les variables réelles sont remplacées par des variables complexes). Par exemple, pour la loi de Gauss, le demi-cercle se prolonge en une sphère, qui a la même équation. Cette courbe (ainsi que sa surface associée) est appelée la courbe spectrale. Elle n'est pas universelle: chaque loi de probabilité a sa courbe spectrale.

## UNIVERSALITÉ POUR LES CORRÉLATIONS

Mais la densité spectrale est une information bien maigre sur la statistique des valeurs propres. Il est intéressant de savoir aussi quelle est la probabilité que deux nombres donnés soient simultanément valeurs propres d'une même matrice, ou trois nombres, ou quatre, etc. Ces probabilités conjointes de plusieurs valeurs sont ce qu'on appelle des corrélations de densité.

Notons  $p_2(x, y)$  la densité de probabilité que  $x$  et  $y$  soient simultanément valeurs propres d'une même matrice,  $p_3(x, y, z)$  la densité de probabilité que  $x, y$  et  $z$  soient des valeurs propres, etc. Si les valeurs propres étaient indépendantes les unes des autres, on aurait simplement:

$$p_2(x, y) = p(x) \times p(y).$$

Mais ce n'est pas le cas. En effet, le fait de savoir qu'il existe une valeur propre positionnée en  $x$  affecte la probabilité qu'il y en ait une en  $y$ . La différence  $C(x, y) = p_2(x, y) - p(x)p(y)$  entre les deux expressions s'appelle la covariance. Elle indique à quel point les valeurs propres sont reliées: plus la covariance est petite, plus elles sont indépendantes; plus elle est grande, plus les valeurs propres sont liées. Or pour bien connaître la statistique des spectres de matrices aléatoires, il faut connaître non seulement la densité spectrale  $p(x)$ , mais aussi la covariance et toutes les covariances de corrélations, c'est-à-dire les généralisations de la covariance à 3, 4, 5... valeurs propres.

Nous avons vu que, quand la taille de la matrice augmente, la densité spectrale tend vers une limite qui n'est pas universelle. En revanche, le résultat remarquable est que les covariances des corrélations, elles, sont universelles dans un sens que l'on va expliquer et qui fait intervenir la géométrie.

Comme on l'a indiqué, chaque loi de probabilité d'une matrice aléatoire conduit à une courbe spectrale, qui se prolonge en une surface. Depuis les années 2000, mes collègues et moi avons établi que cela fonctionne aussi dans le sens inverse. Autrement dit, on sait partir

## LES ONDES AU FILTRE DU SPECTRE

**L**es valeurs propres et vecteurs propres des matrices jouent un rôle très important en physique ou en ingénierie. La raison est la suivante. Supposons que l'état du système étudié soit décrit par une onde ayant plusieurs composantes, comme c'est le cas en mécanique quantique ou dans le domaine des télécommunications. Cette onde peut être représentée par un vecteur, et son évolution temporelle dépend d'un opérateur qui est représenté par une matrice. Lorsque l'onde n'est pas un vecteur propre de la matrice régissant son évolution, elle ressort à chaque fois différente et se retrouve souvent en opposition de phase avec elle-même; quand l'opération se répète, le signal finit par se brouiller totalement. Au contraire, les ondes qui sont des vecteurs

propres ne se brouillent pas: elles ne font que se renforcer elles-mêmes et finissent par dominer le signal de sortie. Dans les systèmes physiques qui interagissent longtemps (pour un atome, « longtemps » peut signifier moins de un milliardième de seconde), seules les ondes constituant des vecteurs propres sont finalement observables: ce sont les seules qui s'amplifient, alors que les autres se brouillent. C'est pourquoi le spectre est si important en physique.

Prenons l'exemple d'une onde lumineuse incidente sur un atome. L'état de l'onde lumineuse est caractérisé par les fréquences (ou couleurs, de l'infrarouge à l'ultraviolet) qui la composent. Il est donc représenté par un vecteur indiquant la proportion de chacune de ces fréquences ou couleurs. L'interaction avec l'atome agit sur l'onde comme un opérateur linéaire, qui transforme à chaque instant le vecteur. Comme l'interaction dure tout le temps de passage de la lumière, les états qui ne sont pas des vecteurs propres vont se brouiller, contrairement aux vecteurs propres. En fin de compte, seules les couleurs correspondant au spectre de la matrice d'interaction subsisteront. Le sens mathématique du mot spectre rejoint ainsi son sens physique initial (au XVIII<sup>e</sup> siècle, le terme de spectre utilisé par Newton ou Goethe désignait les « illusions » lumineuses, des phénomènes de décomposition de la lumière incompris à l'époque).

d'une surface et déduire de sa géométrie la densité spectrale correspondante  $p(x)$ , ainsi que toutes les covariances de corrélations. Par ailleurs, il a été montré que si deux lois de probabilité ont des courbes spectrales (des surfaces) qui peuvent se déformer l'une en l'autre par des changements de coordonnées vérifiant certaines conditions (il s'agit de « transformations conformes »), alors les covariances associées à l'une se déduisent des covariances de l'autre par un simple changement de coordonnées: les covariances sont les mêmes à cette transformation près, et c'est en ce sens que les covariances des corrélations sont universelles.

## DES LIENS AVEC LA GÉOMÉTRIE, LA THÉORIE DES CORDES...

Les liens ainsi mis au jour entre matrices aléatoires et surfaces ont mené à de nombreuses découvertes récentes en géométrie et en physique théorique. C'est notamment le cas en théorie des cordes, qui a l'ambition de concilier la physique (quantique) des particules et la