

> densité spectrale. Cependant, Wigner, Dyson et d'autres ont progressivement découvert que pour toutes les lois cette forme limite est une courbe définie par des équations algébriques (équations ne faisant intervenir que des polynômes) et qu'il est possible de la prolonger en une surface (c'est l'unique surface qui a la même équation que la courbe, équation où les variables réelles sont remplacées par des variables complexes). Par exemple, pour la loi de Gauss, le demi-cercle se prolonge en une sphère, qui a la même équation. Cette courbe (ainsi que sa surface associée) est appelée la courbe spectrale. Elle n'est pas universelle: chaque loi de probabilité a sa courbe spectrale.

UNIVERSALITÉ POUR LES CORRÉLATIONS

Mais la densité spectrale est une information bien maigre sur la statistique des valeurs propres. Il est intéressant de savoir aussi quelle est la probabilité que deux nombres donnés soient simultanément valeurs propres d'une même matrice, ou trois nombres, ou quatre, etc. Ces probabilités conjointes de plusieurs valeurs sont ce qu'on appelle des corrélations de densité.

Notons $p_2(x, y)$ la densité de probabilité que x et y soient simultanément valeurs propres d'une même matrice, $p_3(x, y, z)$ la densité de probabilité que x, y et z soient des valeurs propres, etc. Si les valeurs propres étaient indépendantes les unes des autres, on aurait simplement:

$$p_2(x, y) = p(x) \times p(y).$$

Mais ce n'est pas le cas. En effet, le fait de savoir qu'il existe une valeur propre positionnée en x affecte la probabilité qu'il y en ait une en y . La différence $C(x, y) = p_2(x, y) - p(x)p(y)$ entre les deux expressions s'appelle la covariance. Elle indique à quel point les valeurs propres sont reliées: plus la covariance est petite, plus elles sont indépendantes; plus elle est grande, plus les valeurs propres sont liées. Or pour bien connaître la statistique des spectres de matrices aléatoires, il faut connaître non seulement la densité spectrale $p(x)$, mais aussi la covariance et toutes les covariances de corrélations, c'est-à-dire les généralisations de la covariance à 3, 4, 5... valeurs propres.

Nous avons vu que, quand la taille de la matrice augmente, la densité spectrale tend vers une limite qui n'est pas universelle. En revanche, le résultat remarquable est que les covariances des corrélations, elles, sont universelles dans un sens que l'on va expliquer et qui fait intervenir la géométrie.

Comme on l'a indiqué, chaque loi de probabilité d'une matrice aléatoire conduit à une courbe spectrale, qui se prolonge en une surface. Depuis les années 2000, mes collègues et moi avons établi que cela fonctionne aussi dans le sens inverse. Autrement dit, on sait partir

LES ONDES AU FILTRE DU SPECTRE

Les valeurs propres et vecteurs propres des matrices jouent un rôle très important en physique ou en ingénierie. La raison est la suivante. Supposons que l'état du système étudié soit décrit par une onde ayant plusieurs composantes, comme c'est le cas en mécanique quantique ou dans le domaine des télécommunications. Cette onde peut être représentée par un vecteur, et son évolution temporelle dépend d'un opérateur qui est représenté par une matrice. Lorsque l'onde n'est pas un vecteur propre de la matrice régissant son évolution, elle ressort à chaque fois différente et se retrouve souvent en opposition de phase avec elle-même; quand l'opération se répète, le signal finit par se brouiller totalement. Au contraire, les ondes qui sont des vecteurs

propres ne se brouillent pas: elles ne font que se renforcer elles-mêmes et finissent par dominer le signal de sortie. Dans les systèmes physiques qui interagissent longtemps (pour un atome, « longtemps » peut signifier moins de un milliardième de seconde), seules les ondes constituant des vecteurs propres sont finalement observables: ce sont les seules qui s'amplifient, alors que les autres se brouillent. C'est pourquoi le spectre est si important en physique.

Prenons l'exemple d'une onde lumineuse incidente sur un atome. L'état de l'onde lumineuse est caractérisé par les fréquences (ou couleurs, de l'infrarouge à l'ultraviolet) qui la composent. Il est donc représenté par un vecteur indiquant la proportion de chacune de ces fréquences ou couleurs. L'interaction avec l'atome agit sur l'onde comme un opérateur linéaire, qui transforme à chaque instant le vecteur. Comme l'interaction dure tout le temps de passage de la lumière, les états qui ne sont pas des vecteurs propres vont se brouiller, contrairement aux vecteurs propres. En fin de compte, seules les couleurs correspondant au spectre de la matrice d'interaction subsisteront. Le sens mathématique du mot spectre rejoint ainsi son sens physique initial (au XVIII^e siècle, le terme de spectre utilisé par Newton ou Goethe désignait les « illusions » lumineuses, des phénomènes de décomposition de la lumière incompris à l'époque).

d'une surface et déduire de sa géométrie la densité spectrale correspondante $p(x)$, ainsi que toutes les covariances de corrélations. Par ailleurs, il a été montré que si deux lois de probabilité ont des courbes spectrales (des surfaces) qui peuvent se déformer l'une en l'autre par des changements de coordonnées vérifiant certaines conditions (il s'agit de « transformations conformes »), alors les covariances associées à l'une se déduisent des covariances de l'autre par un simple changement de coordonnées: les covariances sont les mêmes à cette transformation près, et c'est en ce sens que les covariances des corrélations sont universelles.

DES LIENS AVEC LA GÉOMÉTRIE, LA THÉORIE DES CORDES...

Les liens ainsi mis au jour entre matrices aléatoires et surfaces ont mené à de nombreuses découvertes récentes en géométrie et en physique théorique. C'est notamment le cas en théorie des cordes, qui a l'ambition de concilier la physique (quantique) des particules et la



La statistique des positions relatives des arbres dans les forêts non plantées par l'homme est similaire à celle des valeurs propres de matrices aléatoires – une constatation faite vers 1989 par le physicien français Gérard Le Caër.

relativité générale d'Einstein, et qui suppose que les particules ne sont pas ponctuelles, mais de minuscules cordes, dotées d'une longueur.

Dans ce cadre, l'une des principales questions est de calculer la probabilité d'une évolution de ces objets : étant donnée une position de départ d'une corde, quelle est la probabilité de telle ou telle position d'arrivée ? Ces probabilités dépendent de la géométrie de l'espace-temps où se déplacent les cordes. Or la théorie des cordes n'est mathématiquement cohérente que dans un espace-temps à 10 dimensions. Pour concilier cette contrainte théorique avec notre perception d'un espace-temps n'ayant que 4 dimensions, on suppose que les 6 dimensions supplémentaires nous sont invisibles parce qu'elles s'enroulent sur elles-mêmes à

une échelle extrêmement petite, de l'ordre de 10^{-35} mètre.

Mais les calculs sont difficiles et dépendent du choix de la façon dont s'enroulent les 6 dimensions. Il en résulte autant de théories des cordes que de choix possibles pour la géométrie des 6 dimensions invisibles. Y aurait-il un moyen simple de calculer les probabilités d'évolution, pour chaque choix ? Entre 2002 et 2012, plusieurs travaux de recherche, dont ceux de Nicolas Orantin et moi, ont permis de montrer que pour certains choix – ceux pour lesquels les 6 dimensions supplémentaires s'enroulent autour d'une surface –, les probabilités sont les mêmes que celles calculées en théorie des matrices aléatoires, si l'on choisit comme courbe spectrale la surface autour de laquelle s'enroulent les 6 dimensions...

Un dernier exemple de l'intérêt des matrices aléatoires est leur lien avec l'« intégrabilité », propriété physicomathématique que l'on décrit souvent comme le contraire du chaos. Les systèmes physiques intégrables sont réguliers et prédictibles ; de tels systèmes, par exemple un ressort qui oscille, une toupie symétrique, une planète seule en orbite autour d'une étoile, une vague se propageant le long d'un canal (un modèle simple de tsunami), sont nombreux et très étudiés.

Dès que le système se complique (par exemple deux planètes ou plus autour d'une étoile), son comportement peut devenir chaotique et, en pratique, imprévisible. On pourrait penser que les systèmes intégrables sont rares >



Pour certains choix en théorie des cordes, on retrouve les lois des matrices aléatoires

