

> dans la nature, mais c'est plutôt le contraire: ils sont assez fréquents, ou du moins ils décrivent les systèmes réels avec une assez bonne approximation. Intuitivement, cela tient au fait que la partie chaotique des systèmes complexes se moyenne; or ce que l'on observe à notre échelle, c'est la partie qui ne se moyenne pas, justement celle qui est régulière.

Pour en revenir aux matrices aléatoires, une découverte importante, due à Madan Lal Mehta et Michel Gaudin, ainsi qu'à Freeman Dyson et à des chercheurs de l'université de Kyoto, a été que les matrices aléatoires constituent des systèmes intégrables. Qu'est-ce que cela signifie?

UNE QUANTITÉ QUI DÉTERMINE TOUTES LES AUTRES

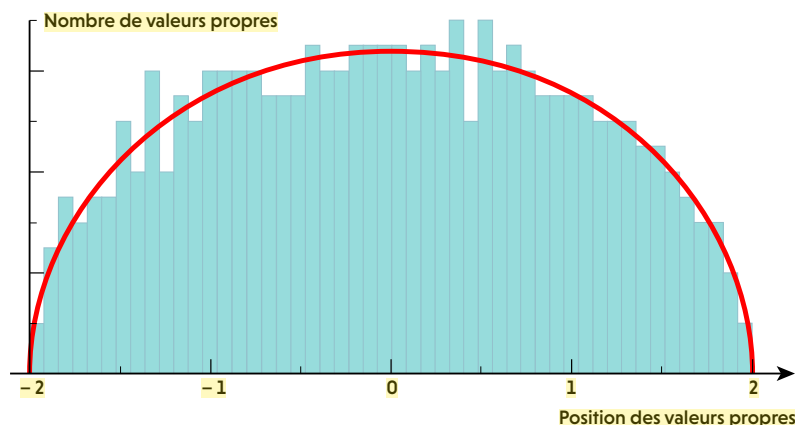
Lorsqu'on se donne une loi de probabilité à laquelle obéit une certaine variable (qui peut être un nombre, un vecteur, une matrice...), on peut calculer des moyennes. Prenons l'exemple d'un nombre x tiré au hasard un grand nombre de fois. On peut calculer la moyenne de x , qui est la somme des valeurs tirées, divisée par le nombre de tirages. On peut, de même, considérer la moyenne de x^2 , de x^3 , de x^4 , etc.

L'exemple le plus simple est la loi de Gauss centrée sur 0 (voir la figure page 37). Comme cette loi est symétrique, la probabilité de tirer x est la même que celle de tirer son opposé $-x$. Il en résulte que la valeur moyenne de x est nulle, de même que la valeur moyenne de toute puissance impaire de x . En revanche, la valeur moyenne de x^2 (ainsi que de toute puissance paire de x) n'est pas nulle, car c'est une somme de nombres positifs.

Pour la loi de Gauss, il existe une remarquable relation entre les valeurs moyennes des puissances paires de x . Si l'on note S la moyenne de x^2 , on calcule que la moyenne de x^4 vaut $3S^2$, que celle de x^6 vaut $15S^3$... et que celle de x^{2k} vaut S^k fois le produit de tous les nombres impairs inférieurs à $2k$. Ainsi, toute cette loi de Gauss est caractérisée par un seul nombre, S , qui détermine toutes les valeurs moyennes possibles par une formule.

Les lois intégrables sont celles qui ont cette propriété: si l'on connaît une moyenne dénommée fonction à deux points (pour la loi de Gauss centrée sur 0, c'est la moyenne de x^2), alors on retrouve toutes les autres moyennes par une formule (plus compliquée que la version simplifiée donnée plus haut), qui est la même pour toutes les lois intégrables. Autrement dit, les lois intégrables sont caractérisées par le fait que toutes les moyennes et toutes les corrélations sont engendrées par une seule donnée, la fonction à deux points.

Or les distributions statistiques des valeurs propres des matrices aléatoires ont cette propriété et sont un exemple de système intégrable. Quelle est ici la fonction à deux points?



LE «DEMI-CERCLE DE WIGNER»

L'histogramme de la densité de valeurs propres d'une matrice aléatoire (ici de dimension 500×500) tend vers une courbe – la «courbe spectrale» – quand la dimension tend vers l'infini. Lorsque les nombres de la matrice sont tirés au hasard selon la loi de Gauss, la courbe spectrale tend vers un demi-cercle (moyennant des facteurs de normalisation appropriés). La courbe spectrale n'est pas universelle: si la loi de probabilité est différente, la courbe spectrale n'est pas la même.

Donnons-nous deux nombres x et y . Pour chaque tirage d'une matrice aléatoire de dimension $n \times n$, considérons son spectre, constitué de n valeurs propres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. La fonction à deux points, que l'on notera $K(x, y)$, est la moyenne, sur l'ensemble des tirages, du rapport:

$$[(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)]/[(y-a_1)(y-a_2)\dots(y-a_n)].$$

On montre que cette fonction $K(x, y)$ engendre toutes les corrélations. Par exemple, la covariance $C(x, y)$ est directement reliée à $[K(x, y)K(y, x) - 1]/(x-y)^2$. De même, toutes les autres corrélations s'expriment par des formules simples en fonction de $K(x, y)$.

Dans l'étude des systèmes intégrables, une stratégie très efficace pour les chercheurs est de tester leurs idées sur les matrices aléatoires, en espérant (et cela marche très souvent) que des relations qui sont vraies pour les matrices aléatoires le sont aussi pour tous les systèmes intégrables. De nombreuses propriétés de ces derniers ont été découvertes ainsi.

En somme, les matrices aléatoires se sont révélées des objets d'étude fascinants. Leurs propriétés caractéristiques se manifestent dans une grande diversité de phénomènes sans liens connus ou directs avec les matrices. En mathématiques et en physique théorique, les recherches à leur sujet ont eu des impacts inattendus et considérables. La richesse de ce domaine a attiré et continue d'attirer de nombreux et brillants chercheurs, dont des lauréats de la médaille Fields comme l'Australien Terence Tao, le Franco-Russe Maxim Kontsevitch ou l'Américain Edward Witten. Il faut dire que le sujet est loin d'être épuisé, ne serait-ce que parce qu'il reste à comprendre l'ubiquité des matrices aléatoires et à répondre aux multiples questions que leur étude a soulevées, dont celle du lien avec l'hypothèse de Riemann n'est pas la moindre. ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Eynard et al., Lecture on random matrices, 2015 (<https://arxiv.org/abs/1510.04430>).

G. W. Anderson et al., An Introduction to Random Matrices, Cambridge University Press, 2009.

B. Eynard et N. Orantin, Algebraic methods in random matrices and enumerative geometry, 2008 (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00340602/>).

M. L. Mehta, Random Matrices, Elsevier/Academic Press, 2004.

B. Hayes, Le spectre du Riemannium, Pour la Science, n° 312, octobre 2003.

H. Kunz, Matrices aléatoires en physique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.