

L'ESSENTIEL

> En mathématiques et en physique, il existe des points singuliers qui posent des problèmes à la théorie.

> Au XVIII^e siècle, les mathématiciens D'Alembert et Euler ont rencontré une telle singularité lors de l'étude de la chute d'un corps ponctuel, mais n'ont pas ou mal perçu sa nature exceptionnelle.

> Ils proposèrent chacun une solution fondée sur des arguments peu rationnels.

> Il fallut plus d'un siècle pour que des savants se convainquent de l'inutilité d'une telle recherche : en cette singularité, la théorie atteint ses limites...

L'AUTEUR



JACQUES GAPAILLARD
professeur honoraire
à l'université de Nantes
où il a enseigné
les mathématiques
et l'histoire de l'astronomie

Le trou noir des Lumières

Au XVIII^e siècle, d'illustres savants se sont trouvés confrontés à une singularité mathématique. Sans soupçonner qu'elle constituait un sérieux obstacle théorique, ils n'hésitèrent pas à passer outre de façon *a priori* plausible ou, au contraire, carrément extravagante.

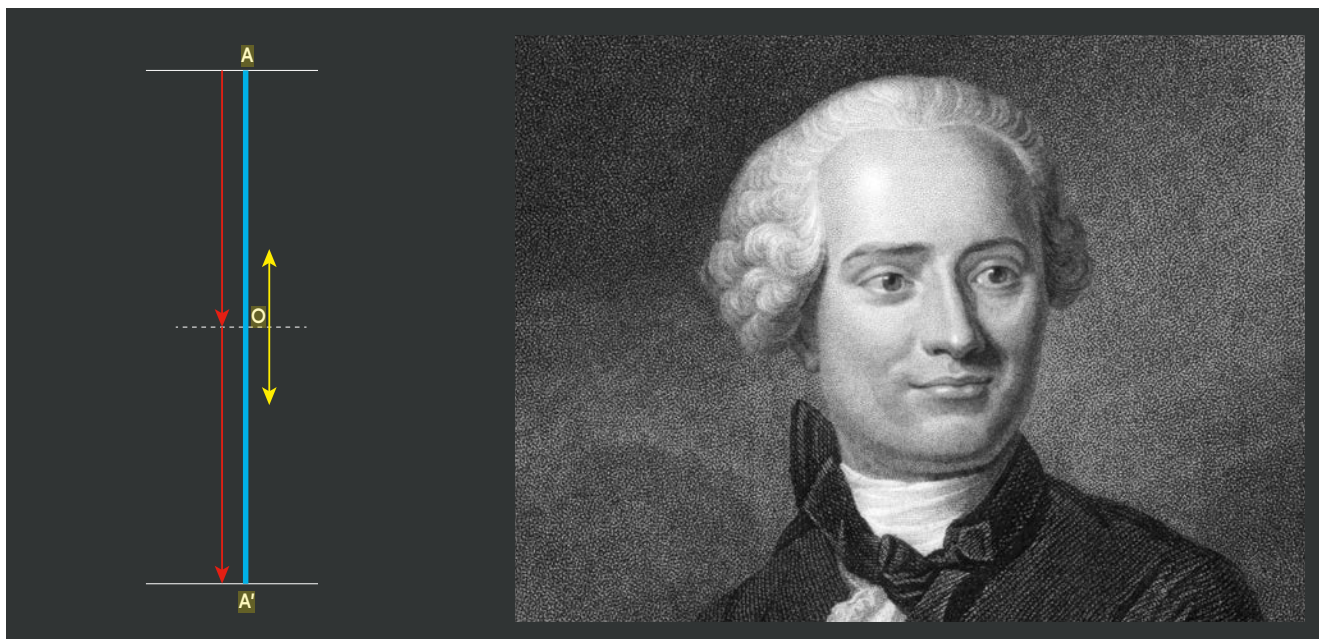
En astrophysique, un trou noir est une région si dense de l'espace-temps que rien ne s'en échappe, pas même la lumière. Ces objets célestes si particuliers présentent des singularités

de l'espace-temps : des points ou des régions que la théorie mathématique de la gravitation – la relativité générale – ne sait pas décrire. Des singularités existent dans nombre de champs mathématiques. On en rencontre notamment dans l'étude des courbes et des surfaces, ou dans celle des fonctions d'une variable complexe, ou encore des équations différentielles. Aujourd'hui, les scientifiques savent que ces points sont en général hors du domaine de validité de leur théorie. Mais cela n'a pas toujours été le cas, et les premières confrontations à des singularités ont même conduit à d'étranges solutions issues de raisonnements peu rationnels. C'est ainsi qu'au XVIII^e siècle, des mathématiciens aussi reconnus que Jean Le Rond D'Alembert et Leonhard Euler

ont rencontré une singularité dans un problème très simple de mécanique théorique classique – qui ressemble à celui d'un trou noir ponctuel dans un espace de dimension 1 – et n'ont pas bien pris la mesure de la difficulté qui lui était liée...

UNE DÉLICATE QUESTION

Le problème en question traitait de la chute d'un corps ponctuel sur un autre. En mécanique théorique classique, dite aussi newtonienne ou rationnelle, il est commode et habituel de considérer la fiction d'un point matériel, c'est-à-dire d'un point géométrique doté d'une masse. D'après la loi de Newton de la gravitation, un tel point matériel, situé en un point fixe O de l'espace, dit centre d'attraction, exerce sur un autre point matériel P, à la distance r de O, une force d'attraction d'intensité proportionnelle à $1/r^2$. Du moins est-ce le cas aussi longtemps que $r \neq 0$. Mais si r vient à s'annuler, l'attraction exercée sur P n'est plus définie et, pour elle, O est le siège d'une singularité.



► Ici, le centre d'attraction O est regardé comme une pure abstraction géométrique, où aucun objet matériel n'est supposé se trouver. Il s'agit donc d'une situation dépourvue de réalité physique. Néanmoins, rien n'interdit de considérer le problème mathématique posé par le mouvement d'un point matériel P soumis à une attraction en $1/r^2$ qui émanerait de O.

Dans ces conditions, Newton avait déjà pratiquement établi, dans ses *Principia* (1687), que si P se trouve en dehors de O à un instant donné, avec une vitesse non nulle et non dirigée selon la droite OP, il décrira ultérieurement dans l'espace un arc de parabole ou d'hyperbole, ou encore il accomplira des révolutions sur une ellipse à l'instar des mouvements planétaires autour du Soleil, toutes ces coniques ayant un foyer en O. Mais le cas qui nous occupe ici est celui de la chute libre où P, abandonné hors de O avec une vitesse initiale nulle, se dirige directement vers ce point. Le calcul montre que sa vitesse croît alors au-delà de toute limite pour devenir infinie lorsqu'il atteint O, à l'issue d'un temps fini.

Et après? Que se passe-t-il une fois que P est parvenu en O? Il semble d'abord que P ne puisse faire autrement que continuer en ligne droite au-delà de O, où il est arrivé avec un formidable élan. Quoi de plus intense, en effet, que l'élan conféré par une vitesse infinie? Mais d'un autre côté, à mesure que P s'approche de O, son attraction vers ce point voit, elle aussi, son intensité dépasser toute limite pour devenir infinie quand P atteint O, d'où il ne paraît pas pouvoir s'échapper. Alors, entre une vitesse prodigieuse et une attraction qui ne l'est pas moins, laquelle va l'emporter sur l'autre?

Un grand spécialiste de la mécanique classique, Paul Appell, tranche la question à sa manière. Dans son *Cours de mécanique rationnelle* (1888), il avance un argument qu'il reprendra dans son célèbre *Traité de mécanique rationnelle* (1893) et qui consiste à observer que le cas du point matériel P atteignant le centre d'attraction n'est pas envisageable, car «le mobile s'approchera de O avec une vitesse croissant indéfiniment, circonstance qui ne peut évidemment pas se réaliser physiquement: il y aura un choc avant que la distance des deux corps s'annule». Mais cet argument ne résout en rien le problème purement théorique tel qu'il a été posé ci-dessus, où le centre d'attraction, rappelons-le, est un simple point géométrique.

UNE ÉVIDENCE DE D'ALEMBERT

Dans le tome VII de ses *Opusculs mathématiques* (1780), D'Alembert, le plus grand mathématicien français de son époque, déclare au sujet de ce délicat problème: «Il est évident [que le point P] doit alors continuer son chemin au-delà [du centre d'attraction], en s'en éloignant jusqu'à une distance égale à celle d'où il est parti, et qu'il reviendra ensuite sur ses pas, en faisant les mêmes vibrations.» Autrement dit, le mobile P effectuera une suite d'oscillations rectilignes et symétriques de part et d'autre du centre O d'attraction, à la manière d'un mouvement pendulaire (voir le schéma ci-dessus). C'est en effet la solution qui doit s'imposer à D'Alembert à partir du moment où il admet, apparemment sans hésiter, que le mobile franchira ce centre en poursuivant sa course rectiligne. Sans aucune considération pour une

Pour Jean Le Rond D'Alembert, il était évident qu'un point matériel lâché en A et soumis à un centre d'attraction O ponctuel traverserait ce point, continuerait sa route jusqu'au symétrique A' de A par rapport à O, puis rebrousseait chemin, oscillant indéfiniment entre A et A'.