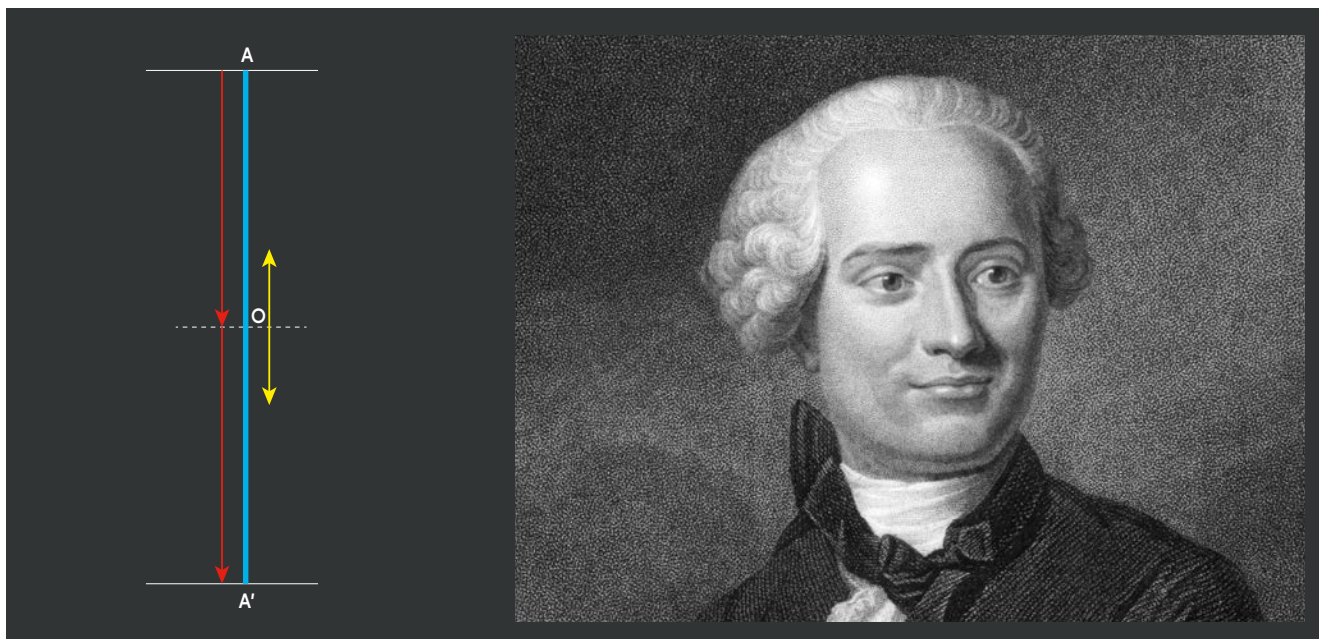




> Ici, le centre d'attraction O est regardé comme une pure abstraction géométrique, où aucun objet matériel n'est supposé se trouver. Il s'agit donc d'une situation dépourvue de réalité physique. Néanmoins, rien n'interdit de considérer le problème mathématique posé par le mouvement d'un point matériel P soumis à une attraction en $1/r^2$ qui émanerait de O.

Dans ces conditions, Newton avait déjà pratiquement établi, dans ses *Principia* (1687), que si P se trouve en dehors de O à un instant donné, avec une vitesse non nulle et non dirigée selon la droite OP, il décrira ultérieurement dans l'espace un arc de parabole ou d'hyperbole, ou encore il accomplira des révolutions sur une ellipse à l'instar des mouvements planétaires autour du Soleil, toutes ces coniques ayant un foyer en O. Mais le cas qui nous occupe ici est celui de la chute libre où P, abandonné hors de O avec une vitesse initiale nulle, se dirige directement vers ce point. Le calcul montre que sa vitesse croît alors au-delà de toute limite pour devenir infinie lorsqu'il atteint O, à l'issue d'un temps fini.

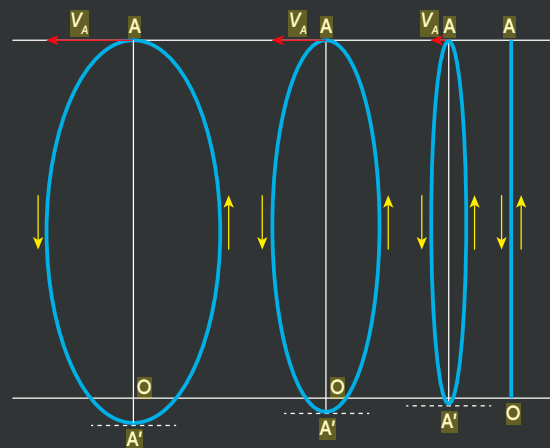
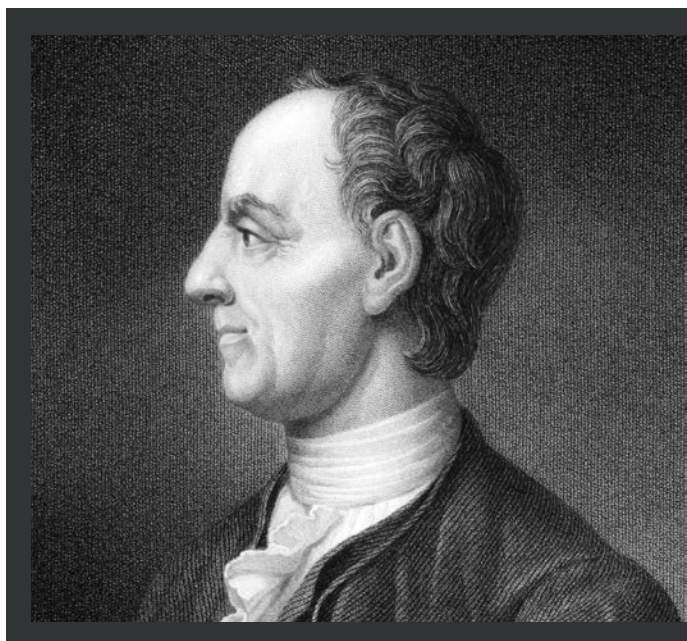
Et après? Que se passe-t-il une fois que P est parvenu en O? Il semble d'abord que P ne puisse faire autrement que continuer en ligne droite au-delà de O, où il est arrivé avec un formidable élan. Quoi de plus intense, en effet, que l'élan conféré par une vitesse infinie? Mais d'un autre côté, à mesure que P s'approche de O, son attraction vers ce point voit, elle aussi, son intensité dépasser toute limite pour devenir infinie quand P atteint O, d'où il ne paraît pas pouvoir s'échapper. Alors, entre une vitesse prodigieuse et une attraction qui ne l'est pas moins, laquelle va l'emporter sur l'autre?

Un grand spécialiste de la mécanique classique, Paul Appell, tranche la question à sa manière. Dans son *Cours de mécanique rationnelle* (1888), il avance un argument qu'il reprendra dans son célèbre *Traité de mécanique rationnelle* (1893) et qui consiste à observer que le cas du point matériel P atteignant le centre d'attraction n'est pas envisageable, car «le mobile s'approchera de O avec une vitesse croissant indéfiniment, circonstance qui ne peut évidemment pas se réaliser physiquement: il y aura un choc avant que la distance des deux corps s'annule». Mais cet argument ne résout en rien le problème purement théorique tel qu'il a été posé ci-dessus, où le centre d'attraction, rappelons-le, est un simple point géométrique.

UNE ÉVIDENCE DE D'ALEMBERT

Dans le tome VII de ses *Opuscules mathématiques* (1780), D'Alembert, le plus grand mathématicien français de son époque, déclare au sujet de ce délicat problème: «Il est évident [que le point P] doit alors continuer son chemin au-delà [du centre d'attraction], en s'en éloignant jusqu'à une distance égale à celle d'où il est parti, et qu'il reviendra ensuite sur ses pas, en faisant les mêmes vibrations.» Autrement dit, le mobile P effectuera une suite d'oscillations rectilignes et symétriques de part et d'autre du centre O d'attraction, à la manière d'un mouvement pendulaire (*voir le schéma ci-dessus*). C'est en effet la solution qui doit s'imposer à D'Alembert à partir du moment où il admet, apparemment sans hésiter, que le mobile franchira ce centre en poursuivant sa course rectiligne. Sans aucune considération pour une

Pour Jean Le Rond D'Alembert, il était évident qu'un point matériel lâché en A et soumis à un centre d'attraction O ponctuel traverserait ce point, continuerait sa route jusqu'au symétrique A' de A par rapport à O, puis rebrousseait chemin, oscillant indéfiniment entre A et A'.



Leonhard Euler avança une solution autre que celle de D'Alembert : il imagina d'abord que le point matériel avait une vitesse V_A non nulle perpendiculaire à OA , de façon que sa trajectoire soit une ellipse de foyer O et de grand axe AA' . Puis il diminua la vitesse V_A jusqu'à l'annuler, ce qui aplatit l'ellipse, tandis que A' se rapprochait de O . Mais quant à affirmer qu'en passant à la limite, le mouvement orbital sur l'ellipse va se réduire à un va-et-vient rectiligne entre A et O , c'est une tout autre affaire.

attraction vers O où son intensité devient pourtant infinie, il ne retient que l'aspect dynamique d'un mouvement rendu irrésistible par sa vitesse également infinie en ce point.

Ce n'est d'ailleurs pas la première fois que D'Alembert se fie à une prétendue évidence. Dans un discours prononcé en 1771 à l'Académie des sciences, il envisage un tir vertical effectué au pôle et déclare que le boulet retombera toujours, «quelque prodigieuse vitesse qu'on lui imprime». Mais dans le même volume des *Opuscles*, où il publie les démonstrations des résultats qu'il s'était borné à énoncer en 1771, au sujet de ce qu'il avait dit du tir vertical au pôle, il se contente d'affirmer que c'est une évidence. Or c'est faux ! Dès que le boulet est projeté avec une vitesse initiale égale ou supérieure à la vitesse de libération d'environ 11,2 kilomètres par seconde, il s'éloigne sans retour, jusqu'à l'infini.

Toujours est-il qu'au sujet de notre problème, le lecteur de D'Alembert doit recevoir son résultat pendulaire comme une vérité première qu'il n'est pas même utile de chercher à démontrer. Et pourtant, il s'est trouvé un savant, et pas des moindres, pour soutenir une tout autre solution.

Dans ce même mémoire de 1780 où il a livré sa réponse oscillatoire, D'Alembert poursuit en évoquant une solution très différente du même problème, trouvée par Leonhard Euler. Le mathématicien suisse, le plus célèbre du XVIII^e siècle, avait en effet devancé son collègue français avec un résultat pour le moins inattendu et qui est loin d'avoir convaincu ce dernier : «Il est vrai que M. Euler, dans sa *Mécanique* [...], croit qu'un corps qu'on laisserait tomber directement au [centre O des accélérations], lorsque

la force centrale est en raison inverse du carré de la distance, doit revenir sur ses pas quand il est arrivé en $[O]$. Mais il est visible que ce grand géomètre s'est trompé sur ce point.»

D'Alembert n'est sans doute pas mécontent de pouvoir contester un résultat d'Euler avec lequel il est en froid à cette époque, résultat qu'il qualifie d'absurde. On peut en effet s'interroger sur la manière dont Euler est parvenu à une conclusion aussi contre-intuitive, avec un brusque retournement d'une vitesse infinie. Car cette solution n'a d'égard pour aucune des deux quantités infinies litigieuses, qu'il s'agisse de la vitesse du point P en O dans le sens de la chute, ou de l'attraction qu'il subit en ce point.

UN TÉMÉRAIRE PASSAGE À LA LIMITE POUR EULER

Reprenant un procédé déjà utilisé par Newton, Euler aborde le problème au premier tome de sa *Mechanica* (1736), rédigée en latin. Il suppose d'abord qu'à l'instant initial où il est en A , le mobile P a une vitesse V_A dirigée perpendiculairement à OA , telle que sa trajectoire soit une ellipse de grand axe AA' et dont O est l'un des foyers (voir le schéma ci-dessus). Puis Euler imagine que la vitesse V_A , toujours perpendiculaire à OA , diminue jusqu'à s'annuler. Alors l'ellipse va s'aplatir tandis que A' se rapprochera de O et, à la limite, elle va se confondre avec le segment OA . C'est par ce passage à la limite, non seulement géométrique mais étendu au mouvement de P , qu'Euler obtient son curieux résultat. Assurément, il s'est fié à un passage à la limite bien téméraire, et cela d'autant plus que, tout comme D'Alembert, Euler ne place en O aucune masse ponctuelle qui, au moins dans une ➤