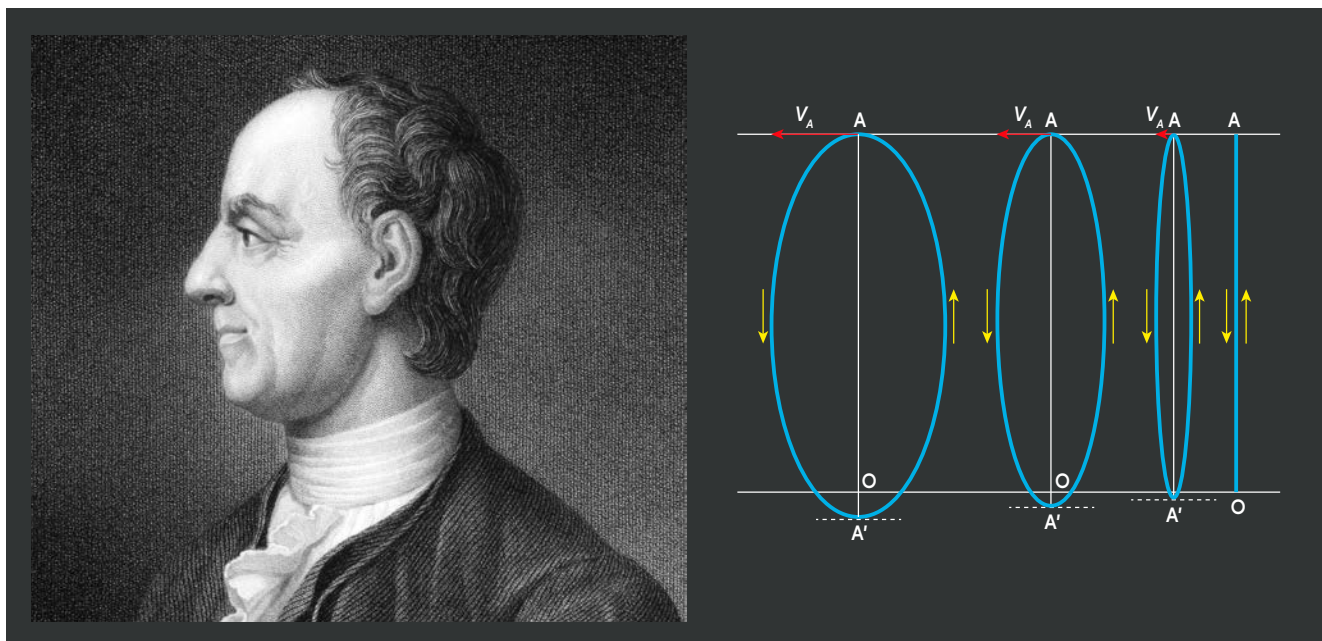




Leonhard Euler avança une solution autre que celle de D'Alembert : il imagina d'abord que le point matériel avait une vitesse V_A non nulle perpendiculaire à OA , de façon que sa trajectoire soit une ellipse de foyer O et de grand axe AA' . Puis il diminua la vitesse V_A jusqu'à l'annuler, ce qui aplatit l'ellipse, tandis que A' se rapprochait de O . Mais quant à affirmer qu'en passant à la limite, le mouvement orbital sur l'ellipse va se réduire à un va-et-vient rectiligne entre A et O , c'est une tout autre affaire.

attraction vers O où son intensité devient pourtant infinie, il ne retient que l'aspect dynamique d'un mouvement rendu irrésistible par sa vitesse également infinie en ce point.

Ce n'est d'ailleurs pas la première fois que D'Alembert se fie à une prétendue évidence. Dans un discours prononcé en 1771 à l'Académie des sciences, il envisage un tir vertical effectué au pôle et déclare que le boulet retombera toujours, «quelque prodigieuse vitesse qu'on lui imprime». Mais dans le même volume des *Opuscles*, où il publie les démonstrations des résultats qu'il s'était borné à énoncer en 1771, au sujet de ce qu'il avait dit du tir vertical au pôle, il se contente d'affirmer que c'est une évidence. Or c'est faux ! Dès que le boulet est projeté avec une vitesse initiale égale ou supérieure à la vitesse de libération d'environ 11,2 kilomètres par seconde, il s'éloigne sans retour, jusqu'à l'infini.

Toujours est-il qu'au sujet de notre problème, le lecteur de D'Alembert doit recevoir son résultat pendulaire comme une vérité première qu'il n'est pas même utile de chercher à démontrer. Et pourtant, il s'est trouvé un savant, et pas des moindres, pour soutenir une tout autre solution.

Dans ce même mémoire de 1780 où il a livré sa réponse oscillatoire, D'Alembert poursuit en évoquant une solution très différente du même problème, trouvée par Leonhard Euler. Le mathématicien suisse, le plus célèbre du XVIII^e siècle, avait en effet devancé son collègue français avec un résultat pour le moins inattendu et qui est loin d'avoir convaincu ce dernier : «Il est vrai que M. Euler, dans sa *Mécanique* [...], croit qu'un corps qu'on laisserait tomber directement au [centre O des accélérations], lorsque

la force centrale est en raison inverse du carré de la distance, doit revenir sur ses pas quand il est arrivé en $[O]$. Mais il est visible que ce grand géomètre s'est trompé sur ce point.»

D'Alembert n'est sans doute pas mécontent de pouvoir contester un résultat d'Euler avec lequel il est en froid à cette époque, résultat qu'il qualifie d'absurde. On peut en effet s'interroger sur la manière dont Euler est parvenu à une conclusion aussi contre-intuitive, avec un brusque retournement d'une vitesse infinie. Car cette solution n'a d'égard pour aucune des deux quantités infinies litigieuses, qu'il s'agisse de la vitesse du point P en O dans le sens de la chute, ou de l'attraction qu'il subit en ce point.

UN TÊMÉRAIRE PASSAGE À LA LIMITE POUR EULER

Reprenant un procédé déjà utilisé par Newton, Euler aborde le problème au premier tome de sa *Mechanica* (1736), rédigée en latin. Il suppose d'abord qu'à l'instant initial où il est en A , le mobile P a une vitesse V_A dirigée perpendiculairement à OA , telle que sa trajectoire soit une ellipse de grand axe AA' et dont O est l'un des foyers (voir le schéma ci-dessus). Puis Euler imagine que la vitesse V_A , toujours perpendiculaire à OA , diminue jusqu'à s'annuler. Alors l'ellipse va s'aplatir tandis que A' se rapprochera de O et, à la limite, elle va se confondre avec le segment OA . C'est par ce passage à la limite, non seulement géométrique mais étendu au mouvement de P , qu'Euler obtient son curieux résultat. Assurément, il s'est fié à un passage à la limite bien téméraire, et cela d'autant plus que, tout comme D'Alembert, Euler ne place en O aucune masse ponctuelle qui, au moins dans une ➤

certaine mesure, pourrait justifier un rebond de P en ce point. De plus, c'est accorder clairement un pouvoir répulsif au centre d'attraction, paradoxe que des ennemis de la mécanique newtonienne dénonçaient déjà dans le mouvement orbital elliptique. Certains s'étonnaient, en effet, que chaque planète doive passer la moitié de son temps à s'éloigner du Soleil qui est censé l'attirer.

L'AMBIGUÏTÉ DE LAPLACE

Que deux théoriciens comme D'Alembert et Euler, qui sont parmi les plus habiles de leur temps, parviennent à deux conclusions aussi opposées sur une question de mécanique du point apparemment banale, est assurément l'indice d'un sérieux problème. Il ne semble pas douteux que leurs successeurs auront bientôt mis fin à ce scandale scientifique. Or en 1799, Pierre-Simon Laplace, mathématicien majeur du tournant du siècle, s'est effectivement exprimé sur ce sujet au premier tome de son *Traité de mécanique céleste*.

Après avoir rappelé comment le procédé de l'ellipse qui s'aplatit peut servir à calculer la durée de la chute libre rectiligne jusqu'au centre d'attraction à l'aide d'un passage à la limite qui fonctionne, il poursuit par cette mise au point : « Il y a cependant une différence essentielle entre le mouvement elliptique [*sic*] vers le foyer et le mouvement dans une ellipse infiniment aplatie. Dans le premier cas, le corps, parvenu au foyer, passe au-delà, et s'en éloigne à la même distance dont il était parti; dans le second cas, le corps parvenu au foyer revient au point d'où il était parti. Une vitesse tangentielle à l'aphélie [le point A], quelque petite qu'elle soit, suffit pour produire cette différence qui n'influe pas sur le temps que le corps emploie à descendre vers le foyer. »

À première lecture, et même après correction du lapsus d'« elliptique » substitué à « rectiligne », ce texte paraît assez obscur. Il semble bien, en effet, que Laplace accomplisse le tour de force de concilier l'inconciliable en déclarant, sans les nommer, que D'Alembert (« premier cas ») et Euler (« second cas ») ont tous les deux raison ! En effet, tout en n'opposant aucune objection à la solution de D'Alembert, Laplace présente une sorte de justification de celle d'Euler. Et, à cet effet, il introduit le curieux concept d'ellipse infiniment aplatie, entendant par là une ellipse aussi aplatie qu'on le désire, mais qui n'est pourtant pas une ellipse totalement aplatie, dégénérée en un segment de droite comme chez Euler. Laplace entretient toutefois l'ambiguïté de son propos en évoquant « le corps parvenu au foyer », alors qu'en toute rigueur il n'y passera pas, puisque sa trajectoire reste une ellipse. Finalement, de ce surprenant discours, et malgré le lapsus signalé plus haut, les lecteurs de Laplace ont seulement retenu qu'il se

ET SI ON POSE L'ÉQUATION ?

L'équation différentielle qui décrit le problème de chute d'un corps dont discutent Euler et D'Alembert est facile à écrire. Il suffit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile ponctuel : son accélération est proportionnelle à la somme des forces qui agissent sur lui, ici l'attraction en $1/r^2$ qu'il subit de la part du point O. On obtient une équation du type : $d^2r/dt^2 = -k/r^2$, où k est une constante positive. Sa résolution est en revanche bien plus compliquée. Il est assez simple d'en déduire une expression du temps t en fonction de la distance r , mais l'inverse se révèle impossible avec les fonctions usuelles, et le calcul n'apprend rien sur ce qui se produit en O, si ce n'est que le mobile y parvient avec une vitesse infinie...

rangeait à l'opinion de D'Alembert, laquelle est longtemps restée l'opinion dominante.

Au second tome de son *Histoire des mathématiques* (1758), Jean-Étienne Montucla s'est également intéressé au mouvement rectiligne du point matériel P vers le centre d'attraction O. Se référant à Newton et sans nommer Euler, il regarde lui aussi ce mouvement comme le cas limite d'un mouvement elliptique et en conclut : « Le corps ne passera pas au-delà [du centre]. » Mais il ajoute aussitôt : « On peut même assurer qu'il ne rebroussera pas chemin. Car on ne saurait assigner aucune cause qui le réfléchisse en sens contraire. » Montucla est donc clairement opposé à la solution d'Euler, mais aussi, par anticipation, à celle de D'Alembert car, pour lui, le point P parvenu en O doit y rester !

Cette opinion inattendue, et peut-être plus dérangement encore que celle d'Euler puisqu'elle implique une annihilation instantanée d'une vitesse infinie, s'appuie sur une remarque mathématique. Montucla observe en effet que si P, à la distance r de O, s'en approche sous l'action d'une force f proportionnelle à $1/r^2$, sa vitesse V croît moins vite que cette force quand r tend vers 0, car, selon lui, elle est seulement proportionnelle à $1/r$. Cette dernière assertion est erronée, car V varierait approximativement comme $1/\sqrt{r}$, mais cette correction ne fait qu'appuyer davantage son argument qui est d'en conclure que, dans la lutte entre l'attraction et la vitesse infinie en O, c'est la première qui l'emporte. On devine que, parmi les

LIMITE ET LIMITE

Dans sa solution du problème de la chute d'un point matériel sur un point attractif, Euler invoquait un audacieux « passage à la limite ». Or ce procédé ne fonctionne pas toujours : la figure ci-dessous montre les trois premières étapes d'un processus qui, poursuivi indéfiniment, conduit les lignes brisées rouges à se confondre, à la limite, avec le segment bleu AB. Mais si la longueur de AB est a , celle de chaque ligne rouge entre A et B est $a\sqrt{2}$. Dans ce cas, le passage à la limite ne permet donc pas d'obtenir la longueur de AB à partir de celle des lignes rouges.

