

> certaine mesure, pourrait justifier un rebond de P en ce point. De plus, c'est accorder clairement un pouvoir répulsif au centre d'attraction, paradoxe que des ennemis de la mécanique newtonienne dénonçaient déjà dans le mouvement orbital elliptique. Certains s'étonnaient, en effet, que chaque planète doive passer la moitié de son temps à s'éloigner du Soleil qui est censé l'attirer.

## L'AMBIGUÏTÉ DE LAPLACE

Que deux théoriciens comme D'Alembert et Euler, qui sont parmi les plus habiles de leur temps, parviennent à deux conclusions aussi opposées sur une question de mécanique du point apparemment banale, est assurément l'indice d'un sérieux problème. Il ne semble pas douteux que leurs successeurs auront bientôt mis fin à ce scandale scientifique. Or en 1799, Pierre-Simon Laplace, mathématicien majeur du tournant du siècle, s'est effectivement exprimé sur ce sujet au premier tome de son *Traité de mécanique céleste*.

Après avoir rappelé comment le procédé de l'ellipse qui s'aplatit peut servir à calculer la durée de la chute libre rectiligne jusqu'au centre d'attraction à l'aide d'un passage à la limite qui fonctionne, il poursuit par cette mise au point : « Il y a cependant une différence essentielle entre le mouvement elliptique [*sic*] vers le foyer et le mouvement dans une ellipse infiniment aplatie. Dans le premier cas, le corps, parvenu au foyer, passe au-delà, et s'en éloigne à la même distance dont il était parti; dans le second cas, le corps parvenu au foyer revient au point d'où il était parti. Une vitesse tangentielle à l'aphélie [le point A], quelque petite qu'elle soit, suffit pour produire cette différence qui n'influe pas sur le temps que le corps emploie à descendre vers le foyer. »

À première lecture, et même après correction du lapsus d'« elliptique » substitué à « rectiligne », ce texte paraît assez obscur. Il semble bien, en effet, que Laplace accomplisse le tour de force de concilier l'inconciliable en déclarant, sans les nommer, que D'Alembert (« premier cas ») et Euler (« second cas ») ont tous les deux raison ! En effet, tout en n'opposant aucune objection à la solution de D'Alembert, Laplace présente une sorte de justification de celle d'Euler. Et, à cet effet, il introduit le curieux concept d'ellipse infiniment aplatie, entendant par là une ellipse aussi aplatie qu'on le désire, mais qui n'est pourtant pas une ellipse totalement aplatie, dégénérée en un segment de droite comme chez Euler. Laplace entretient toutefois l'ambiguïté de son propos en évoquant « le corps parvenu au foyer », alors qu'en toute rigueur il n'y passera pas, puisque sa trajectoire reste une ellipse. Finalement, de ce surprenant discours, et malgré le lapsus signalé plus haut, les lecteurs de Laplace ont seulement retenu qu'il se

## ET SI ON POSE L'ÉQUATION ?

**L'équation différentielle qui décrit le problème de chute d'un corps dont discutent Euler et D'Alembert est facile à écrire. Il suffit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile ponctuel : son accélération est proportionnelle à la somme des forces qui agissent sur lui, ici l'attraction en  $1/r^2$  qu'il subit de la part du point O. On obtient une équation du type :  $d^2r/dt^2 = -k/r^2$ , où  $k$  est une constante positive. Sa résolution est en revanche bien plus compliquée. Il est assez simple d'en déduire une expression du temps  $t$  en fonction de la distance  $r$ , mais l'inverse se révèle impossible avec les fonctions usuelles, et le calcul n'apprend rien sur ce qui se produit en O, si ce n'est que le mobile y parvient avec une vitesse infinie...**

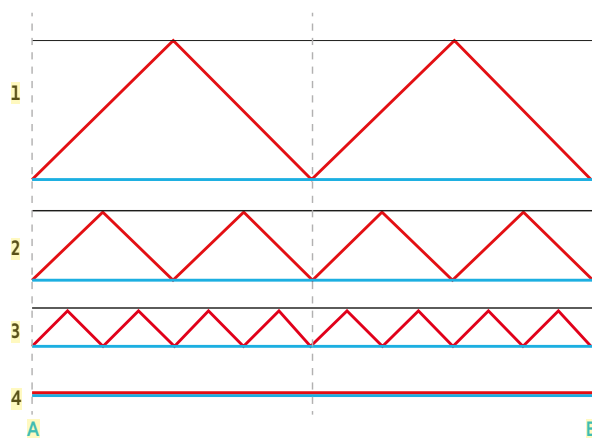
rangeait à l'opinion de D'Alembert, laquelle est longtemps restée l'opinion dominante.

Au second tome de son *Histoire des mathématiques* (1758), Jean-Étienne Montucla s'est également intéressé au mouvement rectiligne du point matériel P vers le centre d'attraction O. Se référant à Newton et sans nommer Euler, il regarde lui aussi ce mouvement comme le cas limite d'un mouvement elliptique et en conclut : « Le corps ne passera pas au-delà [du centre]. » Mais il ajoute aussitôt : « On peut même assurer qu'il ne rebroussera pas chemin. Car on ne saurait assigner aucune cause qui le réfléchisse en sens contraire. » Montucla est donc clairement opposé à la solution d'Euler, mais aussi, par anticipation, à celle de D'Alembert car, pour lui, le point P parvenu en O doit y rester !

Cette opinion inattendue, et peut-être plus dérangeante encore que celle d'Euler puisqu'elle implique une annihilation instantanée d'une vitesse infinie, s'appuie sur une remarque mathématique. Montucla observe en effet que si P, à la distance  $r$  de O, s'en approche sous l'action d'une force  $f$  proportionnelle à  $1/r^2$ , sa vitesse  $V$  croît moins vite que cette force quand  $r$  tend vers 0, car, selon lui, elle est seulement proportionnelle à  $1/r$ . Cette dernière assertion est erronée, car  $V$  varierait approximativement comme  $1/\sqrt{r}$ , mais cette correction ne fait qu'appuyer davantage son argument qui est d'en conclure que, dans la lutte entre l'attraction et la vitesse infinie en O, c'est la première qui l'emporte. On devine que, parmi les

## LIMITE ET LIMITE

**D**ans sa solution du problème de la chute d'un point matériel sur un point attractif, Euler invoquait un audacieux « passage à la limite ». Or ce procédé ne fonctionne pas toujours : la figure ci-dessous montre les trois premières étapes d'un processus qui, poursuivi indéfiniment, conduit les lignes brisées rouges à se confondre, à la limite, avec le segment bleu AB. Mais si la longueur de AB est  $a$ , celle de chaque ligne rouge entre A et B est  $a\sqrt{2}$ . Dans ce cas, le passage à la limite ne permet donc pas d'obtenir la longueur de AB à partir de celle des lignes rouges.



contemporains de Montucla, il s'en trouvait sans doute bien peu pour admettre la possibilité d'un tel arrêt. Sa conclusion fut pourtant reprise au siècle suivant, fondée sur une vitesse qui deviendrait imaginaire si  $P$  dépassait  $O$ . Mais cet argument avait déjà servi à soutenir la solution d'Euler et, de toute façon, cette vitesse imaginaire était illusoire car les calculs étaient faux !

## UN TROU NOIR PONCTUEL

Le débat théorique évoqué ici est resté marginal, car le mouvement gravitationnel rectiligne, sans application en astronomie, ne semble pas avoir beaucoup préoccupé les auteurs d'ouvrages sur la mécanique, et moins encore le problème posé par la chute jusqu'au centre d'attraction. Aussi le fin mot de l'affaire ne sera-t-il que tardivement révélé, au moins par Paul Painlevé au premier tome de son *Cours de mécanique professé à l'École polytechnique*, publié en 1930.

À propos du mobile ponctuel parvenu au centre d'attraction avec une vitesse infinie, il se contente de noter qu'après cet événement, « la discussion ne peut être poursuivie ». Ici, aucune tentative de justifier mathématiquement l'arrêt du mouvement au centre d'attraction, comme ce fut le cas, en particulier, de la part de Montucla qui semble avoir eu raison avant tout le monde. L'arrêt du mobile est inhérent à la théorie même. Painlevé déclare simplement qu'après l'arrivée du mobile au centre d'attraction, la mécanique rationnelle n'a plus rien à dire. En ce qui la concerne, le mouvement du mobile s'arrête nécessairement là, et toutes les spéculations au sujet de ce mouvement après cet événement sont dépourvues de valeur scientifique.

Euler et D'Alembert n'avaient pas prévu un tel dénouement, mais il faut reconnaître que même jusqu'à l'époque de Painlevé, après deux siècles de mécanique newtonienne triomphante, seulement tempérés par les succès de la théorie de la relativité au début du  $xx^e$  siècle, cet aveu d'impuissance à prédire ce qu'il adviendrait du mobile une fois le centre atteint n'était pas facilement envisageable.

La cause précise de l'échec de la mécanique à prédire ce qu'il adviendra au centre d'attraction réside en ce qu'elle interdit que la trajectoire d'un point matériel passe par un point où sa vitesse et la force qui le sollicite ne seraient pas dûment définies, ce qui exclut d'éventuelles valeurs infinies. Tout simplement parce que de telles données imparfaites en ce point ne constituent pas des conditions initiales exploitables pour déterminer le comportement ultérieur du mobile. Cela dit, l'efficacité de la mécanique rationnelle n'est pas en cause. L'objection de Paul Appell rapportée plus haut revient à dire que la « délicate question » posée

au départ n'est pas pertinente du point de vue de la mécanique rationnelle. En effet, avec l'abstraction d'un point où rien n'existe et qui exerce pourtant une force attractive sur les corps matériels, le cadre du problème s'écarte délibérément du monde réel où doit opérer cette théorie. Dans ce cadre fictif, le centre d'attraction est une singularité qui, pendant

# Euler et D'Alembert n'avaient pas prévu un tel dénouement

longtemps, n'a guère troublé les théoriciens, mais qui sort du champ opératoire de la mécanique rationnelle. Pour elle, le mouvement du point matériel en chute libre doit nécessairement s'arrêter en ce point singulier qui se comporte alors comme une sorte de trou noir ponctuel, avec « absorption » finale et définitive du mobile par cette singularité.

Un tel trou noir purement mathématique semble bien éloigné des trous noirs dont s'occupe l'astrophysique moderne et dont l'existence, dans le cadre de la mécanique newtonienne, avait déjà été prévue au  $xviii^e$  siècle, en particulier par Laplace au second tome de son *Exposition du système du monde* (1796). Ces trous noirs sont généralement de dimension non négligeable, comme ceux d'origine stellaire. Ils peuvent même être gigantesques, comme les trous noirs supermassifs dont l'existence est soupçonnée au cœur des galaxies. Mais l'astrophysique envisage aussi la possibilité de trous noirs quasi ponctuels, comme les microtrous noirs primordiaux aux propriétés quantiques qui seraient apparus aux premiers instants de l'Univers.

En fait, la principale différence réside dans la façon d'appréhender ces singularités. Le point matériel, parvenu au centre d'attraction sur lequel il s'est précipité avec une vitesse infinie, y subit une sorte de mort mathématique. Les savants du  $xviii^e$  siècle ignoraient qu'en prédisant son mouvement au-delà, ils lui inventaient une vie après la mort. Aujourd'hui, que les trous noirs rencontrés soient gigantesques ou ponctuels, les scientifiques sont conscients des limites de leurs théories. Et si certains cherchent à savoir ce qui survient au cœur d'un trou noir ou à la naissance de l'Univers, c'est en invoquant de nouvelles théories. ■

## BIBLIOGRAPHIE

J. Le Rond D'Alembert, **Opuscules mathématiques (tome VII)**, 1780.  
[gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62457r/f113](http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62457r/f113)

L. Euler, **Mechanica (tome I)**, 1736.  
<http://eulerarchive.maa.org/pages/E015.html>

P.-S. Laplace, **Traité de Mécanique céleste (tome I)**, 1799.  
[gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8615811x.image](http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8615811x.image)