

contemporains de Montucla, il s'en trouvait sans doute bien peu pour admettre la possibilité d'un tel arrêt. Sa conclusion fut pourtant reprise au siècle suivant, fondée sur une vitesse qui deviendrait imaginaire si P dépassait O . Mais cet argument avait déjà servi à soutenir la solution d'Euler et, de toute façon, cette vitesse imaginaire était illusoire car les calculs étaient faux !

UN TROU NOIR PONCTUEL

Le débat théorique évoqué ici est resté marginal, car le mouvement gravitationnel rectiligne, sans application en astronomie, ne semble pas avoir beaucoup préoccupé les auteurs d'ouvrages sur la mécanique, et moins encore le problème posé par la chute jusqu'au centre d'attraction. Aussi le fin mot de l'affaire ne sera-t-il que tardivement révélé, au moins par Paul Painlevé au premier tome de son *Cours de mécanique professé à l'École polytechnique*, publié en 1930.

À propos du mobile ponctuel parvenu au centre d'attraction avec une vitesse infinie, il se contente de noter qu'après cet événement, « la discussion ne peut être poursuivie ». Ici, aucune tentative de justifier mathématiquement l'arrêt du mouvement au centre d'attraction, comme ce fut le cas, en particulier, de la part de Montucla qui semble avoir eu raison avant tout le monde. L'arrêt du mobile est inhérent à la théorie même. Painlevé déclare simplement qu'après l'arrivée du mobile au centre d'attraction, la mécanique rationnelle n'a plus rien à dire. En ce qui la concerne, le mouvement du mobile s'arrête nécessairement là, et toutes les spéculations au sujet de ce mouvement après cet événement sont dépourvues de valeur scientifique.

Euler et D'Alembert n'avaient pas prévu un tel dénouement, mais il faut reconnaître que même jusqu'à l'époque de Painlevé, après deux siècles de mécanique newtonienne triomphante, seulement tempérés par les succès de la théorie de la relativité au début du xx^e siècle, cet aveu d'impuissance à prédire ce qu'il adviendrait du mobile une fois le centre atteint n'était pas facilement envisageable.

La cause précise de l'échec de la mécanique à prédire ce qu'il adviendra au centre d'attraction réside en ce qu'elle interdit que la trajectoire d'un point matériel passe par un point où sa vitesse et la force qui le sollicite ne seraient pas dûment définies, ce qui exclut d'éventuelles valeurs infinies. Tout simplement parce que de telles données imparfaites en ce point ne constituent pas des conditions initiales exploitables pour déterminer le comportement ultérieur du mobile. Cela dit, l'efficacité de la mécanique rationnelle n'est pas en cause. L'objection de Paul Appell rapportée plus haut revient à dire que la « délicate question » posée

au départ n'est pas pertinente du point de vue de la mécanique rationnelle. En effet, avec l'abstraction d'un point où rien n'existe et qui exerce pourtant une force attractive sur les corps matériels, le cadre du problème s'écarte délibérément du monde réel où doit opérer cette théorie. Dans ce cadre fictif, le centre d'attraction est une singularité qui, pendant

Euler et D'Alembert n'avaient pas prévu un tel dénouement

longtemps, n'a guère troublé les théoriciens, mais qui sort du champ opératoire de la mécanique rationnelle. Pour elle, le mouvement du point matériel en chute libre doit nécessairement s'arrêter en ce point singulier qui se comporte alors comme une sorte de trou noir ponctuel, avec « absorption » finale et définitive du mobile par cette singularité.

Un tel trou noir purement mathématique semble bien éloigné des trous noirs dont s'occupe l'astrophysique moderne et dont l'existence, dans le cadre de la mécanique newtonienne, avait déjà été prévue au $xviii^e$ siècle, en particulier par Laplace au second tome de son *Exposition du système du monde* (1796). Ces trous noirs sont généralement de dimension non négligeable, comme ceux d'origine stellaire. Ils peuvent même être gigantesques, comme les trous noirs supermassifs dont l'existence est soupçonnée au cœur des galaxies. Mais l'astrophysique envisage aussi la possibilité de trous noirs quasi ponctuels, comme les microtrous noirs primordiaux aux propriétés quantiques qui seraient apparus aux premiers instants de l'Univers.

En fait, la principale différence réside dans la façon d'appréhender ces singularités. Le point matériel, parvenu au centre d'attraction sur lequel il s'est précipité avec une vitesse infinie, y subit une sorte de mort mathématique. Les savants du $xviii^e$ siècle ignoraient qu'en prédisant son mouvement au-delà, ils lui inventaient une vie après la mort. Aujourd'hui, que les trous noirs rencontrés soient gigantesques ou ponctuels, les scientifiques sont conscients des limites de leurs théories. Et si certains cherchent à savoir ce qui survient au cœur d'un trou noir ou à la naissance de l'Univers, c'est en invoquant de nouvelles théories. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Le Rond D'Alembert, **Opuscules mathématiques (tome VII)**, 1780.
gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62457r/f113

L. Euler, **Mechanica (tome I)**, 1736.
<http://eulerarchive.maa.org/pages/E015.html>

P.-S. Laplace, **Traité de Mécanique céleste (tome I)**, 1799.
gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8615811x.image

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

On s'intéresse aux carrés magiques depuis plus de deux millénaires. Des amateurs d'énigmes leur ont récemment associé des exigences géométriques, ce qui enrichit spectaculairement le domaine.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En juin 2013, cette rubrique était consacrée aux carrés magiques géométriques, les « carrés géométriques », une merveilleuse invention de Lee Sallows. Cet ingénieur britannique en a développé la théorie pour réaliser une impressionnante collection de solutions réunies dans son livre *Geometric Magic Squares. A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers* (Dover, 2013).

Lee Sallows a introduit la géométrie dans l'arithmétique des carrés magiques de la façon suivante (voir l'encadré 1) : les formes géométriques de chaque case d'un tableau carré sont différentes, mais de même aire ; les formes des cases de toutes les lignes, toutes les colonnes et des deux diagonales constituent les pièces d'un même puzzle, par exemple un même rectangle.

En décembre 2016, William Walkington, un passionné britannique de divertissements mathématiques, a découvert une géométrisation plus directe des carrés magiques. Il a nommé son invention *area magic squares*, que nous traduirons par *carrés magiques d'aires*. Ces objets géométrico-arithmétiques suggèrent une famille de problèmes qui exigent des techniques spécifiques d'attaque dont seul un petit nombre est aujourd'hui maîtrisé. Ces problèmes donneront du fil à retordre à des générations d'amateurs de récréations mathématiques : un nouveau chapitre du domaine ludique des carrés magiques vient de s'ouvrir !

Un carré magique classique est un tableau de nombres entiers, tous différents, possédant n lignes et n colonnes, ayant la rare propriété qu'en additionnant les nombres de chaque ligne ou de chaque colonne, on trouve toujours la même somme S . On exige aussi que le total des nombres de chacune des deux diagonales soit égal à S ; si ce n'est pas le cas, le carré est seulement « semi-magique ». Pour un carré de taille $n \times n$, cela conduit donc à $2n+2$ sommes de n nombres qui doivent toutes valoir S . On s'amuse parfois à satisfaire des contraintes supplémentaires : que les entiers utilisés soient consécutifs, ou que ce soient tous des nombres premiers, etc.

L'idée des carrés magiques d'aires est de prendre un carré magique classique, de taille $n \times n$, et de lui associer le découpage d'une surface carrée en n^2 formes correspondant aux n^2 cases du carré magique, avec la contrainte que chacune des n^2 formes du découpage doit avoir une aire proportionnelle au nombre correspondant du carré magique utilisé (voir l'encadré 1, dessin b).

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE CONSTRUCTION

Est-il toujours possible d'associer un carré magique d'aires à un carré magique usuel donné ? Est-ce difficile ?

La réponse est qu'il existe une méthode simple et systématique permettant d'associer, à chaque carré magique usuel connu, un carré ➤

CARRÉS GÉOMAGIQUES ET CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

1

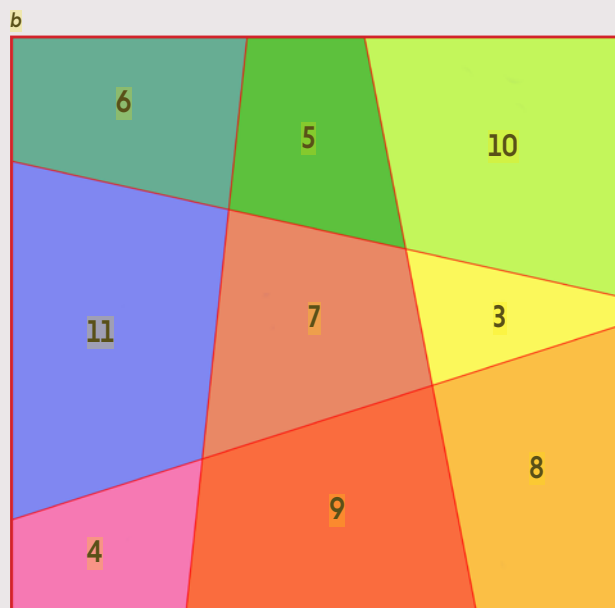
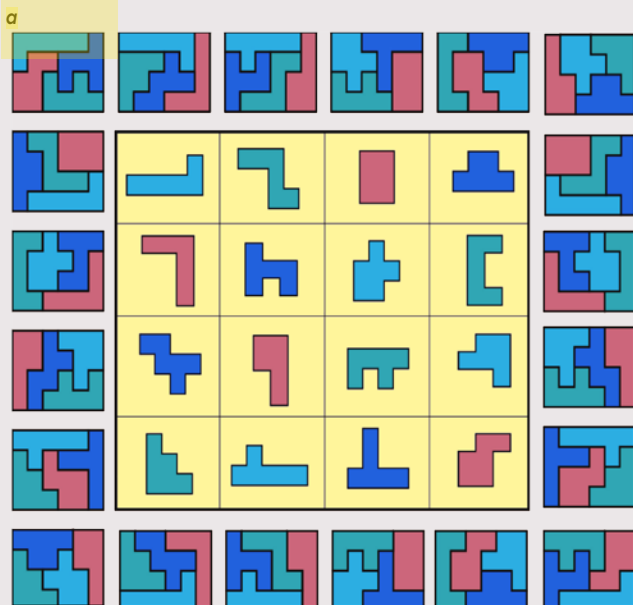
Dans le tableau central de formes donné en a, chacune des quatre rangées définit un puzzle aboutissant au rectangle de taille 6×4 . Il en va de même pour chacune des quatre colonnes et pour les deux diagonales de ce tableau – un carré géomagique – découvert par Lee Sallows.

Dans le carré b, les lignes de découpe en 9 quadrilatères sont telles que l'aire de chacun est proportionnelle au nombre écrit : c'est un carré magique d'aires. Ce découpage a été trouvé par William Walkington par tâtonnement. Il n'était pas certain que la figure dessinée, qui est correcte quand on calcule avec deux décimales,

le reste encore quand on exige plus de précision.

Un programme de Walter Trump par une méthode d'approximation a précisé les coordonnées des points de la construction assurant une exactitude des contraintes sur les aires avec une précision de 14 décimales.

On a depuis prouvé que les équations exprimant les contraintes ont une solution exacte correspondant au dessin (donc avec une infinité de décimales), bien qu'aucune expression simple n'en ait été proposée. En c et d sont représentés des carrés magiques d'aires d'ordre 6 calculés par William Walkington.



c

62	64	66	68	70	72
117	97	77	57	37	17
47	55	63	71	79	87
32	46	60	74	88	102
22	40	58	76	94	112
122	100	78	56	34	12

d

69	73	77	81	85	89
44	58	72	86	100	114
124	106	88	70	52	34
74	76	78	80	82	84
144	118	92	66	40	14
19	43	67	91	115	139

magique d'aires utilisant ses nombres. La méthode est absolument générale et semble donc résoudre le problème d'une manière rapide et définitive. Nous allons voir cependant qu'elle n'est pas totalement satisfaisante; c'est pourquoi nous ajouterons une contrainte supplémentaire dans la définition, ce qui rendra alors le problème plus délicat et fixera des défis intéressants.

En quoi consiste la méthode générale? On part d'un carré magique quelconque et du tableau dessinant les cases où sont placés les nombres. On déplace quelques segments verticaux délimitant ces cases afin que dans chaque ligne horizontale du carré magique initial, les cases carrées deviennent des rectangles aux aires proportionnelles aux nombres présents dans les cases (on peut, de la même façon, agir sur les colonnes de formes et déplacer des segments horizontaux).

Ces manipulations sont toujours possibles, justement parce que la somme des nombres d'une même ligne (ou d'une même colonne) est constante. Prenons un exemple de carré magique 3×3 où la somme est 15 (voir l'encadré 2, dessin a). On prend donc comme unité sur chaque segment horizontal $1/15$ de la longueur du côté du carré à découper, et on déplace les segments verticaux pour que les bases des rectangles aient pour longueur $4/15$, $9/15$, $2/15$ pour les cases de la première ligne. Pour la seconde ligne, les bases seront $3/15$, $5/15$, $7/15$; et pour la troisième, elles seront $8/15$, $1/15$, $6/15$. On obtient bien ce qu'on recherchait: les cases ont des aires proportionnelles aux nombres inscrits à l'intérieur (voir l'encadré 2, dessin b).

Il est bien clair que pour tout carré magique initial, la méthode produira un carré magique

2

TRANSFORMATIONS DES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

Dans la transformation par la méthode des rectangles, on déplace quelques segments internes délimitant les cases du tableau a de façon que les aires des rectangles obtenus soient proportionnelles aux nombres écrits en leur centre. On peut jouer sur les segments verticaux (b) ou faire coulisser des segments horizontaux (c). On peut ensuite déformer les cases du carré sans en changer les aires: on déforme certaines des lignes, en prenant garde de ne changer aucune aire. Ici huit côtés de rectangles ont été remplacés par des lignes plus compliquées (d). Dans la définition complète d'un carré magique d'aires, on exigera que le découpage consiste en lignes continues (et sans superpositions) joignant les bords opposés du carré mis en pièces (e).

Malheureusement, la méthode des rectangles et sa généralisation ne produisent pas de tels découpages, et il faut donc chercher d'autres méthodes. Lorsque, en plus d'être continues et sans superpositions, on impose aux lignes de découpage d'être des segments de droite, les carrés magiques d'aires sont alors qualifiés de linéaires.

Au XVII^e siècle, le mathématicien français Frénicle de Bessy a énuméré exactement 880 carrés magiques d'ordre 4 utilisant les entiers de 1 à 16. Le carré magique d'aires associé à l'un d'eux (f) est obtenu par découpage du carré de base par trois lignes continues en bleu liant les côtés haut et bas du carré, et trois lignes continues en rouge liant les côtés droit et gauche (ce carré magique d'aires n'est pas linéaire).

