

> magique d'aires utilisant ses nombres. La méthode est absolument générale et semble donc résoudre le problème d'une manière rapide et définitive. Nous allons voir cependant qu'elle n'est pas totalement satisfaisante; c'est pourquoi nous ajouterons une contrainte supplémentaire dans la définition, ce qui rendra alors le problème plus délicat et fixera des défis intéressants.

En quoi consiste la méthode générale? On part d'un carré magique quelconque et du tableau dessinant les cases où sont placés les nombres. On déplace quelques segments verticaux délimitant ces cases afin que dans chaque ligne horizontale du carré magique initial, les cases carrées deviennent des rectangles aux aires proportionnelles aux nombres présents dans les cases (on peut, de la même façon, agir sur les colonnes de formes et déplacer des segments horizontaux).

Ces manipulations sont toujours possibles, justement parce que la somme des nombres d'une même ligne (ou d'une même colonne) est constante. Prenons un exemple de carré magique 3×3 où la somme est 15 (voir l'encadré 2, dessin a). On prend donc comme unité sur chaque segment horizontal $1/15$ de la longueur du côté du carré à découper, et on déplace les segments verticaux pour que les bases des rectangles aient pour longueur $4/15$, $9/15$, $2/15$ pour les cases de la première ligne. Pour la seconde ligne, les bases seront $3/15$, $5/15$, $7/15$; et pour la troisième, elles seront $8/15$, $1/15$, $6/15$. On obtient bien ce qu'on recherchait: les cases ont des aires proportionnelles aux nombres inscrits à l'intérieur (voir l'encadré 2, dessin b).

Il est bien clair que pour tout carré magique initial, la méthode produira un carré magique

2

TRANSFORMATIONS DES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES

Dans la transformation par la méthode des rectangles, on déplace quelques segments internes délimitant les cases du tableau a de façon que les aires des rectangles obtenus soient proportionnelles aux nombres écrits en leur centre. On peut jouer sur les segments verticaux (b) ou faire coulisser des segments horizontaux (c). On peut ensuite déformer les cases du carré sans en changer les aires: on déforme certaines des lignes, en prenant garde de ne changer aucune aire. Ici huit côtés de rectangles ont été remplacés par des lignes plus compliquées (d). Dans la définition complète d'un carré magique d'aires, on exigera que le découpage consiste en lignes continues (et sans superpositions) joignant les bords opposés du carré mis en pièces (e).

Malheureusement, la méthode des rectangles et sa généralisation ne produisent pas de tels découpages, et il faut donc chercher d'autres méthodes. Lorsque, en plus d'être continues et sans superpositions, on impose aux lignes de découpage d'être des segments de droite, les carrés magiques d'aires sont alors qualifiés de linéaires.

Au XVII^e siècle, le mathématicien français Frénicle de Bessy a énuméré exactement 880 carrés magiques d'ordre 4 utilisant les entiers de 1 à 16. Le carré magique d'aires associé à l'un d'eux (f) est obtenu par découpage du carré de base par trois lignes continues en bleu liant les côtés haut et bas du carré, et trois lignes continues en rouge liant les côtés droit et gauche (ce carré magique d'aires n'est pas linéaire).



d'aires – et même un second si, au lieu de jouer sur les lignes de cases, on joue sur les colonnes en faisant glisser quelques segments horizontaux (voir l'encadré 2, dessin c).

La méthode, comme Lee Sallows en a fait la remarque, se généralise et donne une infinité de carrés magiques d'aires associés à chaque carré magique particulier. Il suffit de partir du résultat de la mise en rectangles, et de modifier certains côtés des rectangles en remplaçant les droites par des lignes qui ne changent pas les aires. Si, par exemple, la ligne dévie vers la droite et diminue l'aire de la pièce à droite de la ligne, on s'arrange pour qu'elle dévie aussi vers la gauche de façon à «rendre ce qu'elle a pris». Ainsi, dans le dessin d de l'encadré 2, on est parti du carré magique d'aires obtenu par la méthode de la «mise en rectangles» et on a appliqué huit fois l'idée de la déformation qui ne change pas les aires; le carré magique d'aires obtenu est compliqué, mais correct.

Le défaut de la méthode des rectangles et de la méthode des déformations de segments est que les lignes qui délimitent les colonnes de formes sont des lignes brisées: les segments déplacés ne se rejoignent pas directement et, en conséquence, les lignes de découpe verticales n'apparaissent pas continues. Peut-on éviter ces inélégantes ruptures ?

ÉVITER LES INÉLÉGANTES LIGNES DE DÉCOUPAGE

L'exemple b de l'encadré 1 montre que oui et, puisque c'est possible au moins dans certains cas, ajoutons à la définition des carrés magiques d'aires formulée plus haut qu'on exigera que le découpage des formes provienne de $n-1$ courbes continues joignant le côté gauche du carré découpé à son côté droit, et d'autant de courbes continues joignant le côté haut du carré au côté bas, et cela sans que les deux types de courbes se superposent par endroits. Je vous épargne la longue et indigeste définition mathématique complète, car le dessin e de l'encadré 2 rend l'idée claire.

Le plus ancien carré magique que l'on connaisse est chinois: c'est celui de Luo Shu, du 11^e siècle avant notre ère, et on le nomme «diagramme des neuf palais» (voir l'encadré 3). En plus des propriétés évoquées, il possède celle d'utiliser une fois exactement chaque nombre de 1 à 9. En ajoutant une unité à chaque case de ce carré millénaire, on obtient un carré magique utilisant une fois exactement chaque nombre de 2 à 10. En recommençant, on aura un carré magique utilisant une fois exactement les nombres de 3 à 11, et ainsi de suite.

Ces carrés magiques les plus simples et les plus élégants possible intéressent particulièrement les amateurs. Bien sûr, une fois l'idée des carrés magiques d'aires formulée, ils ont voulu en trouver qui soient associés à ces

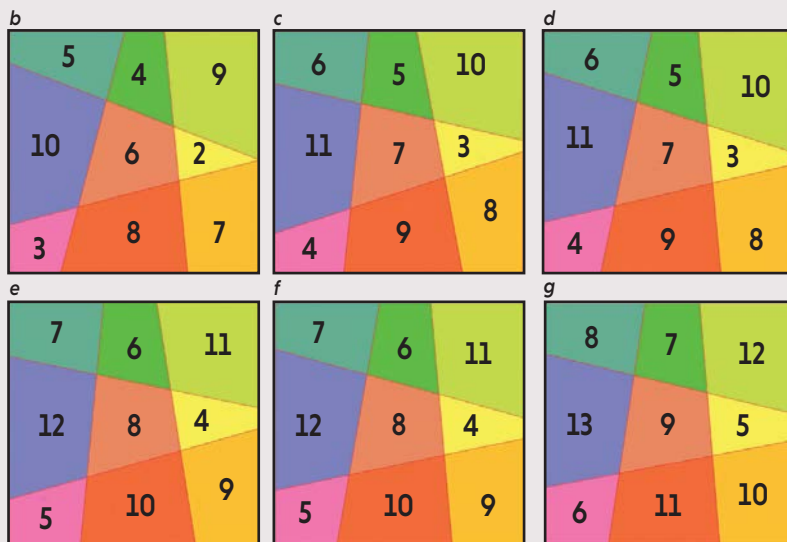
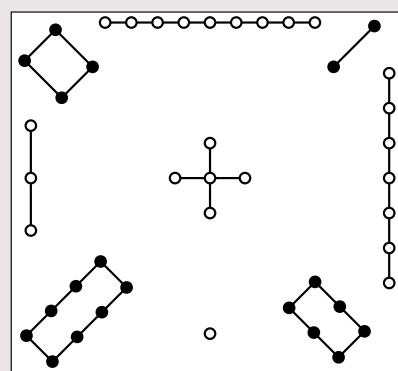
3

LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES LINÉAIRES

Le carré magique de Luo Shu est connu en Chine depuis plus de 2 000 ans. Il est lié aux traditions mathématiques et divinatoires et c'est une configuration géométrique particulièrement appréciée dans le Feng Shui, l'art du placement des objets dans les lieux d'habitation. Il est composé des neuf entiers de 1 à 9.

On le représente souvent avec des points liés (a). La recherche d'un carré magique d'aires linéaire (où les lignes de découpe

sont des segments de droite) fondé sur le Luo Shu a été vaine. Heureusement, on trouve des carrés magiques d'aires linéaires pour les entiers entre 2 et 10 (une solution, b), pour les entiers entre 3 et 11 (deux solutions, c et d), pour les entiers entre 4 et 12 (deux solutions, e et f), pour les entiers entre 5 et 13 (deux solutions, dont une seule est représentée ici, g).



modèles de base. Et pour plus de simplicité encore, ils ont voulu en trouver qui soient linéaires (n'utilisant pour le découpage que des droites comme dans l'exemple b de l'encadré 1). Est-ce toujours possible ?

La réponse est venue d'un programme informatique de recherche systématique. Les résultats ont été indiqués dans l'encadré 3. ➤