

d'aires – et même un second si, au lieu de jouer sur les lignes de cases, on joue sur les colonnes en faisant glisser quelques segments horizontaux (voir l'encadré 2, dessin c).

La méthode, comme Lee Sallows en a fait la remarque, se généralise et donne une infinité de carrés magiques d'aires associés à chaque carré magique particulier. Il suffit de partir du résultat de la mise en rectangles, et de modifier certains côtés des rectangles en remplaçant les droites par des lignes qui ne changent pas les aires. Si, par exemple, la ligne dévie vers la droite et diminue l'aire de la pièce à droite de la ligne, on s'arrange pour qu'elle dévie aussi vers la gauche de façon à «rendre ce qu'elle a pris». Ainsi, dans le dessin d de l'encadré 2, on est parti du carré magique d'aires obtenu par la méthode de la «mise en rectangles» et on a appliqué huit fois l'idée de la déformation qui ne change pas les aires; le carré magique d'aires obtenu est compliqué, mais correct.

Le défaut de la méthode des rectangles et de la méthode des déformations de segments est que les lignes qui délimitent les colonnes de formes sont des lignes brisées: les segments déplacés ne se rejoignent pas directement et, en conséquence, les lignes de découpe verticales n'apparaissent pas continues. Peut-on éviter ces inélégantes ruptures ?

ÉVITER LES INÉLÉGANTES LIGNES DE DÉCOUPAGE

L'exemple b de l'encadré 1 montre que oui et, puisque c'est possible au moins dans certains cas, ajoutons à la définition des carrés magiques d'aires formulée plus haut qu'on exigera que le découpage des formes provienne de $n-1$ courbes continues joignant le côté gauche du carré découpé à son côté droit, et d'autant de courbes continues joignant le côté haut du carré au côté bas, et cela sans que les deux types de courbes se superposent par endroits. Je vous épargne la longue et indigeste définition mathématique complète, car le dessin e de l'encadré 2 rend l'idée claire.

Le plus ancien carré magique que l'on connaisse est chinois: c'est celui de Luo Shu, du II^e siècle avant notre ère, et on le nomme «diagramme des neuf palais» (voir l'encadré 3). En plus des propriétés évoquées, il possède celle d'utiliser une fois exactement chaque nombre de 1 à 9. En ajoutant une unité à chaque case de ce carré millénaire, on obtient un carré magique utilisant une fois exactement chaque nombre de 2 à 10. En recommençant, on aura un carré magique utilisant une fois exactement les nombres de 3 à 11, et ainsi de suite.

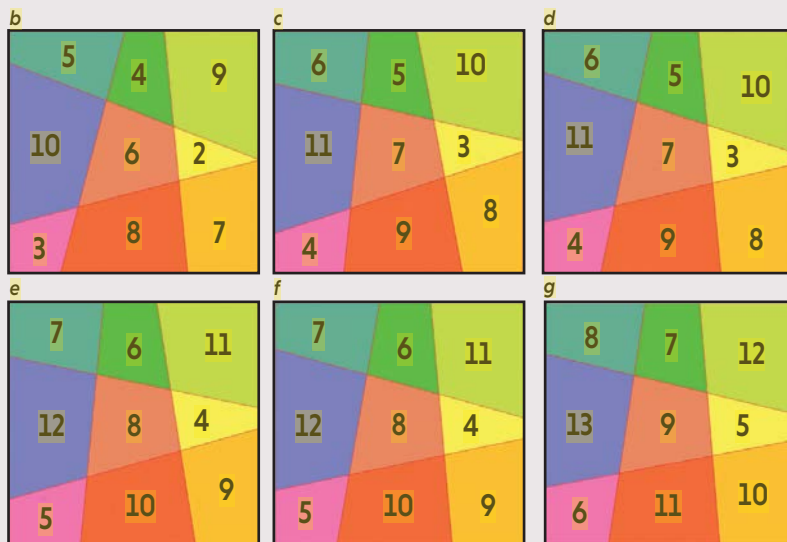
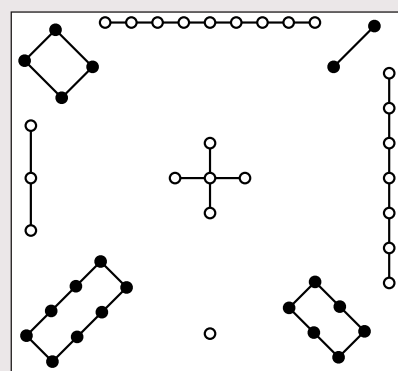
Ces carrés magiques les plus simples et les plus élégants possible intéressent particulièrement les amateurs. Bien sûr, une fois l'idée des carrés magiques d'aires formulée, ils ont voulu en trouver qui soient associés à ces

3

LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES LINÉAIRES

Le carré magique de Luo Shu est connu en Chine depuis plus de 2 000 ans. Il est lié aux traditions mathématiques et divinatoires et c'est une configuration géométrique particulièrement appréciée dans le Feng Shui, l'art du placement des objets dans les lieux d'habitation. Il est composé des neuf entiers de 1 à 9. On le représente souvent avec des points liés (a). La recherche d'un carré magique d'aires linéaire (où les lignes de découpe

sont des segments de droite) fondé sur le Luo Shu a été vaine. Heureusement, on trouve des carrés magiques d'aires linéaires pour les entiers entre 2 et 10 (une solution, b), pour les entiers entre 3 et 11 (deux solutions, c et d), pour les entiers entre 4 et 12 (deux solutions, e et f), pour les entiers entre 5 et 13 (deux solutions, dont une seule est représentée ici, g).



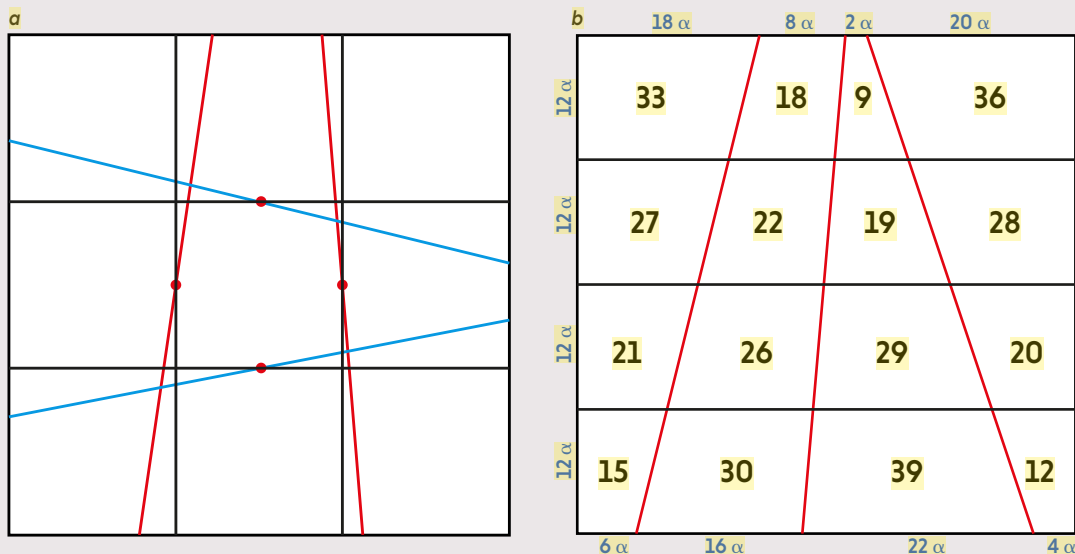
modèles de base. Et pour plus de simplicité encore, ils ont voulu en trouver qui soient linéaires (n'utilisant pour le découpage que des droites comme dans l'exemple b de l'encadré 1). Est-ce toujours possible ?

La réponse est venue d'un programme informatique de recherche systématique. Les résultats ont été indiqués dans l'encadré 3. >

CONSTRUCTION DE CARRÉS D'AIRES MAGIQUES LINÉAIRES

4

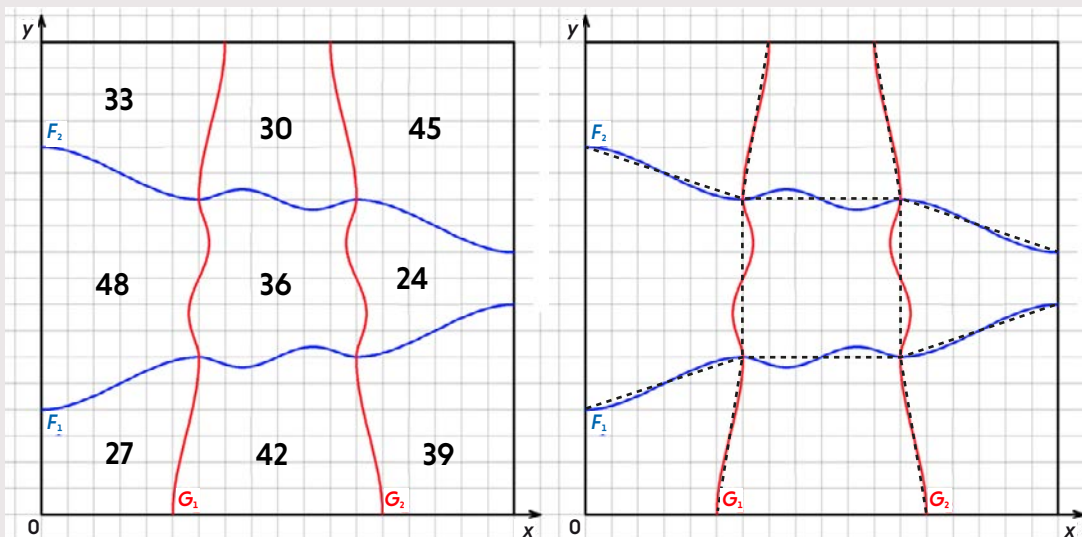
Pour construire des carrés magiques d'aires linéaires de type 3×3 , on trace des droites de découpage pouvant pivoter autour des points rouges (a). Quand ces droites pivotent, la somme des aires des quadrilatères d'une même colonne ou d'une même ligne reste inchangée. On obtient donc, à l'exception des diagonales, un découpage qui satisfait la définition d'un carré magique d'aires linéaire. Le carré magique d'aires montré en b a été trouvé par Walter Trump ; ses points de construction ont des coordonnées entières si le paramètre α est entier.



EN PRENANT DES COURBES BIEN LISSES...

5

La complexité de la figure ci-dessous à gauche (et des formules utilisées pour l'obtenir) n'est qu'apparente. On part d'un carré magique d'aires ayant exactement les mêmes 12 points de construction (deux sur le côté en haut du carré, quatre sur chacune des lignes bleues, et deux en bas) qui sont reliés par des segments de droite (ci-dessous à droite). On remplace ensuite ces segments par des courbes bien lisses et se recollant parfaitement, sans changer les aires des neuf morceaux du découpage (les lignes utilisées ayant localement des centres de symétrie).



$$F_1(x) = \begin{cases} H(54, 3, 5, x) & \text{quand } 0 \leq x < 6 \\ J(x) & \text{quand } 6 \leq x < 12 \\ H(54, 15, 7, x) & \text{quand } 12 \leq x < 18 \end{cases}$$

$$G_1(y) = \begin{cases} H(108, 3, 11/2, y) & \text{quand } 0 \leq y < 6 \\ J(y) & \text{quand } 6 \leq y < 12 \\ H(108, 15, 13/2, y) & \text{quand } 12 \leq y < 18 \end{cases}$$

$$F_2(x) = 9 - F_1(x) \quad G_2(y) = 9 - G_1(y) \quad H(a, x_0, y_0, x) = (x - x_0)(x - x_0 - 27)/a + y_0 \quad J(x) = (9 - x)[(9 - x)^2 - 9]^2/180 + 6$$