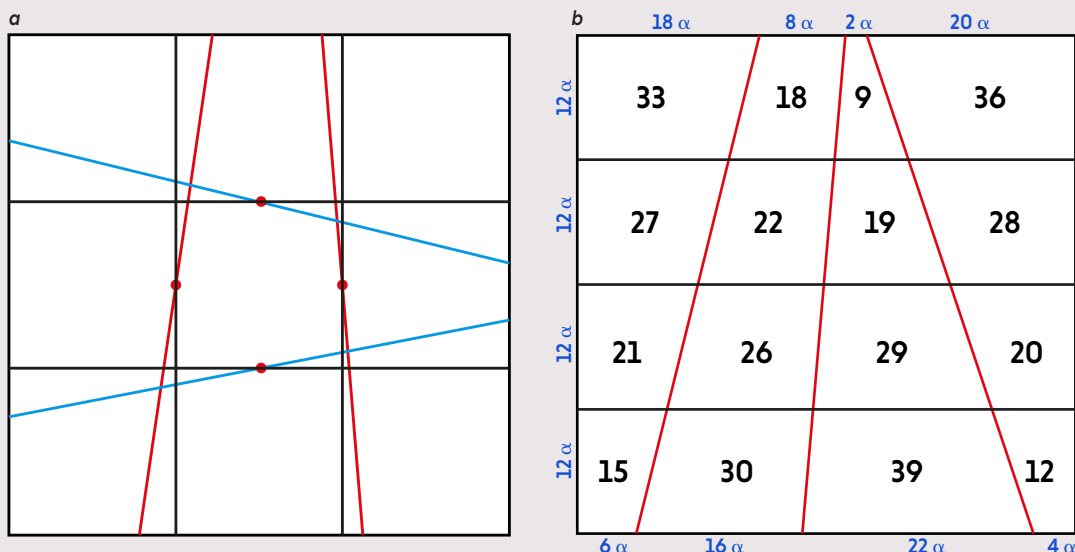


CONSTRUCTION DE CARRÉS D'AIRES MAGIQUES LINÉAIRES

4

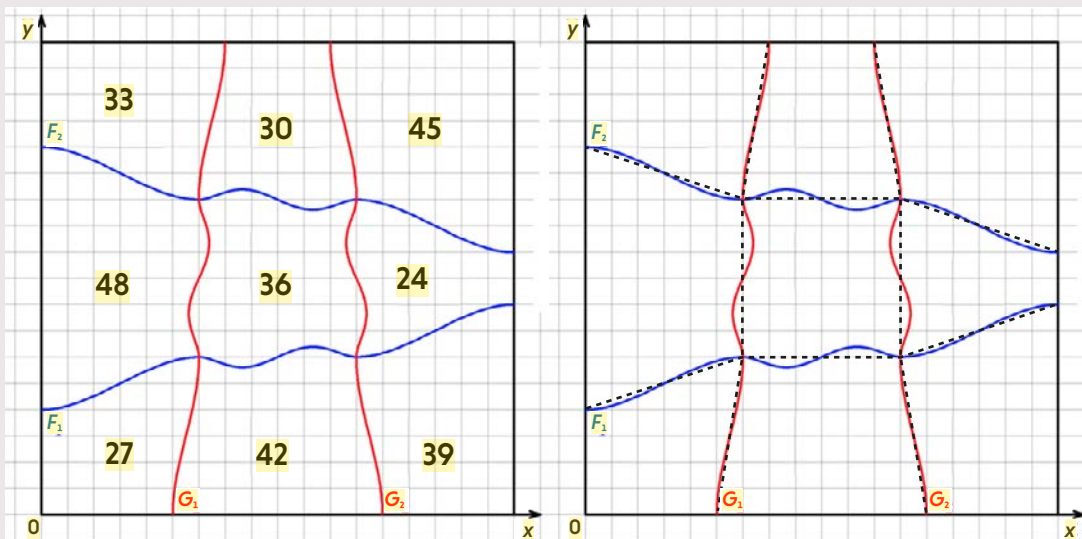
Pour construire des carrés magiques d'aires linéaires de type 3×3 , on trace des droites de découpage pouvant pivoter autour des points rouges (a). Quand ces droites pivotent, la somme des aires des quadrilatères d'une même colonne ou d'une même ligne reste inchangée. On obtient donc, à l'exception des diagonales, un découpage qui satisfait la définition d'un carré magique d'aires linéaire. Le carré magique d'aires montré en b a été trouvé par Walter Trump ; ses points de construction ont des coordonnées entières si le paramètre α est entier.



EN PRENANT DES COURBES BIEN LISSES...

5

La complexité de la figure ci-dessous à gauche (et des formules utilisées pour l'obtenir) n'est qu'apparente. On part d'un carré magique d'aires ayant exactement les mêmes 12 points de construction (deux sur le côté en haut du carré, quatre sur chacune des lignes bleues, et deux en bas) qui sont reliés par des segments de droite (ci-dessous à droite). On remplace ensuite ces segments par des courbes bien lisses et se recollant parfaitement, sans changer les aires des neuf morceaux du découpage (les lignes utilisées ayant localement des centres de symétrie).



$$F_1(x) = \begin{cases} H(54, 3, 5, x) & \text{quand } 0 \leq x < 6 \\ J(x) & \text{quand } 6 \leq x < 12 \\ H(54, 15, 7, x) & \text{quand } 12 \leq x < 18 \end{cases}$$

$$G_1(y) = \begin{cases} H(108, 3, 11/2, y) & \text{quand } 0 \leq y < 6 \\ J(y) & \text{quand } 6 \leq y < 12 \\ H(108, 15, 13/2, y) & \text{quand } 12 \leq y < 18 \end{cases}$$

$$F_2(x) = 9 - F_1(x)$$

$$G_2(y) = 9 - G_1(y)$$

$$H(a, x_0, y_0, x) = (x - x_0)(x - x_0 - 27)/a + y_0$$

$$J(x) = (9 - x)[(9 - x)^2 - 9]^2/180 + 6$$

> La méthode pour parvenir à des résultats, soit négatifs (inexistence de certains types de carrés), soit positifs (détermination des coordonnées des points permettant la construction) repose sur une idée assez simple quand il s'agit des carrés magiques d'aires à neuf cases, et qui est la base du programme informatique donnant les solutions présentées dans l'encadré 3.

UNE MÉTHODE POUR LES CARRÉS MAGIQUES D'AIRES LINÉAIRES DE 9 CASES

On considère quatre droites qui pivotent autour des points situés au milieu des quatre droites découpant le carré en neuf cases de même taille (voir l'encadré 4). On remarque par exemple que lorsque la droite pivotant autour du point milieu situé en haut bouge, la somme des aires des trois quadrilatères du haut reste constante et égale à $\frac{1}{3}$ de l'aire totale du carré. Il en va de même pour les trois quadrilatères situés à droite, dont la somme des aires reste constante quand on fait pivoter la ligne de découpe de gauche, et de même encore pour les trois quadrilatères situés en bas ou à gauche.

On en déduit que la somme des aires des trois quadrilatères de la colonne centrale reste aussi constante quand les quatre lignes pivotent, de même que la somme des aires des trois quadrilatères de la ligne centrale. À l'exception des conditions sur les diagonales, qu'il faut traiter à part, en faisant tourner les quatre droites et en évitant les situations créant des intersections non voulues, on a donc toujours un carré magique d'aires linéaire.

En outre, tous les carrés magiques d'aires linéaires pour un découpage en neuf du carré seront des cas particuliers de ce schéma. Seuls quatre paramètres (les angles des droites pivotantes) déterminent une configuration, et donc l'exploration systématique de toutes les possibilités devient envisageable. C'est elle qui a permis de découvrir les résultats mentionnés. On trouvera plus de détails sur la méthode sur le site internet de l'Allemand Walter Trump, à l'adresse: www.trump.de/magic-squares/area-magic/Third-Order%20Linear%20Area%20Magic%20Squares.pdf

Si on n'exige plus que les nombres utilisés soient consécutifs, les carrés magiques sont bien plus nombreux. On peut donc imposer aux découpages des contraintes encore plus fortes et, par exemple, n'accepter que les découpages où toutes les courbes joignant le côté droit au côté gauche du carré soient parfaitement horizontales. Le dessin b de l'encadré 4 représente un tel carré magique d'aires d'ordre 4, trouvé par Walter Trump. En prenant un nombre entier pour le paramètre α , on a un carré magique d'aires dont toutes les coordonnées des points de construction sont



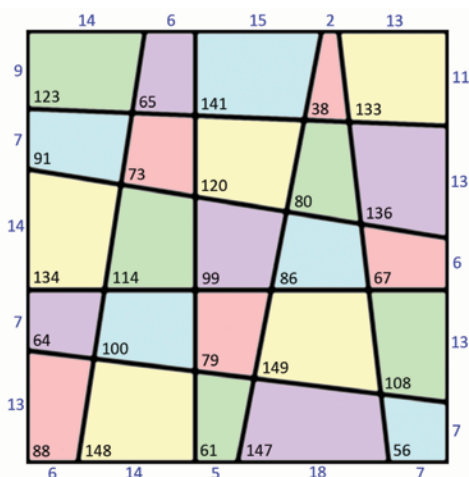
Toutes sortes d'idées ont été explorées, mais le champ ouvert est sans limites



des nombres entiers, ce qui rend facile la vérification de son exactitude.

Plus esthétiques, mais plus difficiles à calculer, les carrés magiques d'aires où les lignes de découpage sont de belles courbes continues non rectilignes ont aussi été l'objet de recherches. L'encadré 5 en montre une avec les équations des courbes utilisées.

Pour trouver des carrés magiques d'aires d'ordre 5, Walter Trump a proposé d'en assouplir un peu la définition: il ne recherche que ceux dont les coordonnées des points de construction sont des entiers, mais il exige pour les aires une condition moins forte que celle de la définition complète: «L'entier le plus proche de l'aire de chacune des formes doit être égal au nombre correspondant du carré magique servant de base.» Il dénomme ces constructions des carrés magiques d'aires arrondis (*rounded area-magic-square*). On a représenté ci-dessous un carré magique d'aires arrondi d'ordre 5.



On le voit, toutes sortes d'idées ont été explorées, mais le champ ouvert est sans limites, et la moisson de configurations associant magiquement arithmétique et géométrie ne fait que commencer. ■

BIBLIOGRAPHIE

W. Trump, **Area magic squares**, <https://bit.ly/2J7u9sP>, consulté le 26/1/2018.

W. Walkington, **Area magic squares and tori of order 3**, <https://bit.ly/2J3zKkd>, consulté le 26/1/2018.

W. Walkington, **Area magic squares and tori of order 4**, <https://bit.ly/2pSUamZ>, consulté le 26/1/2018.

J. Van Delden, **Area magic squares of order 3**, 5 mars 2017 (PDF téléchargeable sur <https://bit.ly/2GKkha6>).

L. Sallows, **Geometric Magic Squares. A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers**, Dover, 2013.