

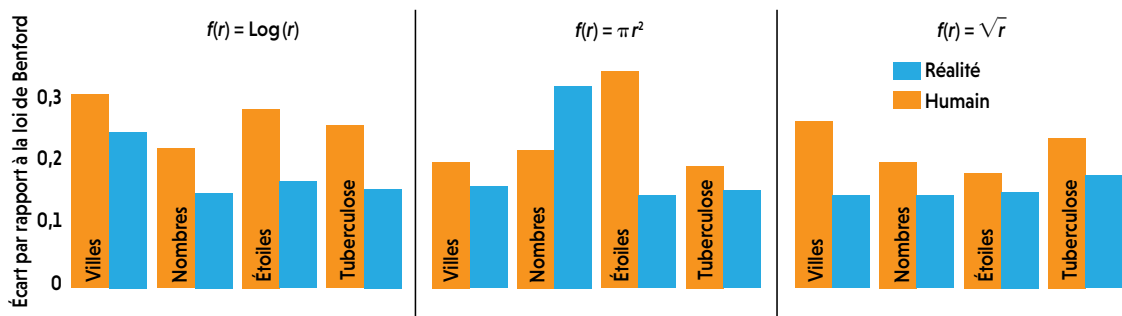
LA LOI DE BENFORD GÉNÉRALE SOUMISE À DES TESTS

4

La loi de Benford générale affirme que la partie fractionnaire des nombres $f(r)$ obtenus à partir d'une série de nombres r sera uniformément étalée sur l'intervalle $[0, 1]$ et cela pour toute fonction continue croissante f . Comme la loi de Benford classique, fondée sur $f(r) = \log_{10}(r)$, on peut utiliser la loi générale pour repérer des données truquées.

Afin de s'assurer que la méthode est bonne, on a demandé à des sujets humains de créer de fausses données et on a mesuré la qualité de ce qu'ils produisaient en utilisant la loi de Benford générale pour trois fonctions différentes : $f(r) = \text{Log}(r)$, $f(r) = \pi r^2$ et $f(r) = \sqrt{r}$. On a utilisé des données provenant de quatre sources différentes qui ont conduit à 12 comparaisons

entre la réalité et ce que produit un humain simulant la réalité (voir le protocole détaillé dans le texte principal). Dans 11 cas sur 12, la simulation par l'humain est moins conforme à la loi de Benford que les données réelles. Il est donc possible, en effectuant des tests fondés sur la loi de Benford, de détecter des données artificielles produites par des humains.



> proportion est $\log_{10}(c+1) - \log_{10}(c)$. C'est exactement ce qu'exprime la loi de Benford formulée au sujet du premier chiffre significatif en base décimale!

La loi de Benford continue est effectivement un peu plus puissante que la loi n'évoquant que les chiffres significatifs en base 10. Elle permet par exemple de retrouver, dans toute base de numération, un énoncé évoquant le premier chiffre significatif.

La justification de l'équivalence utilisée plus haut se fait rigoureusement, mais un exemple clarifiera l'équivalence. Prenons $r=7234$. On a :

$$\begin{aligned} \{\log_{10}(7234)\} &= \log_{10}(7234) - [\log_{10}(7234)] \\ &= \log_{10}(7234) - [3,8593...] = \log_{10}(7234) - 3 \\ &= \log_{10}(7234) - \log_{10}(10^3) = \log_{10}(7234/1000) \\ &= \log_{10}(7,234). \end{aligned}$$

Puisque $\log_{10}$ est une fonction croissante, on a : $\log_{10}(7) < \log_{10}(7,234) < \log_{10}(8)$.

Soustraire $[\log_{10}(r)]$ à $\log_{10}(r)$ ramène la valeur dans le $\log_{10}$ entre 1 et 10 et donc l'encadrement entre $\log_{10}(c)$ et $\log_{10}(c+1)$ repère le premier chiffre significatif. D'où l'équivalence indiquée.

ON VEUT DES PREUVES!

Comme précédemment, le principe énoncé, c'est-à-dire la loi de Benford continue, est un peu vague, et il faudrait préciser quand elle ne s'applique pas, à l'aide de résultats mathématiques démontrés.

De tels énoncés mathématiques existent; ils sont un peu compliqués à formuler (voir l'article de Michel Valadier cité dans la

bibliographie). Ils consistent à formuler des hypothèses exprimant l'idée d'étalement et de régularité, et, en fonction de la précision avec laquelle les hypothèses sont imposées, ils affirment que la série de nombres vérifie la loi de Benford avec une précision que le théorème explicite.

Il faut être un peu prudent avec la formulation non formelle de la loi de Benford; elle n'est que la traduction d'une intuition « invincible » comme l'écrit Poincaré, mais qui reste une intuition. Tout dépend de ce qu'on nomme « large plage de plusieurs ordres de grandeur » et « loi étalée et régulière ». Cependant, l'énoncé informel montre pourquoi la loi est souvent vérifiée, au moins approximativement.

La loi informelle explique aussi une autre propriété de la loi de Benford remarquée depuis longtemps: en augmentant la taille d'une série de nombres, on ne tend pas toujours vers les valeurs annoncées des probabilités $\log_{10}(c+1) - \log_{10}(c)$. L'explication est claire: si les nombres suivent une loi précise, la compensation entre les intervalles quand on passe aux parties fractionnaires des logarithmes ne se fera qu'exceptionnellement, et donc en multipliant les données, on ne converge pas vers une loi parfaitement uniforme sur $[0, 1]$, mais vers une loi approximativement uniforme.

Comprendre est le meilleur moyen d'avancer et c'est ici le cas. L'identification de l'origine de la loi de Benford suggère une méthode simple de la généraliser: remplacer la fonction

BIBLIOGRAPHIE

N. Gauvrit et al., **Generalized Benford's law as a lie detector**, *Advances in Cognitive Psychology*, vol. 13(2), pp. 121-127, 2017.

M. Valadier, **The Benford phenomenon for random variables. Discussion of Feller's way**, prépublication arXiv:1203.2518, 2012.

N. Gauvrit et J.-P. Delahaye, **Scatter and regularity imply Benford's Law... and more**, dans Hector Zenil (éd.), *Randomness through computation : Some answers, more questions*, World Scientific, ch. 4, pp. 53-69, 2011.

N. Gauvrit et J.-P. Delahaye, **La loi de Benford générale**, *Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci.*, vol. 186, pp. 5-15, 2009.

N. Gauvrit et J.-P. Delahaye, **Pourquoi la loi de Benford n'est pas mystérieuse**, *Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci.*, vol. 182, pp. 7-15, 2008.

J.-P. Delahaye, **L'étonnante loi de Benford**, *Pour la Science* n° 351, pp. 90-95, janvier 2007.

$\log_{10}$ par une autre du même type, c'est-à-dire croissante et continue.

Si f est une fonction continue croissante, si l'on choisit des nombres réels r au hasard sur une large plage, et si la loi qui indique la probabilité de tomber sur une des valeurs possibles est assez régulière et étalée, alors la partie fractionnaire des $f(r)$ sera, à peu de choses près, uniformément répartie entre 0 et 1.

Là encore, des théorèmes sont possibles. Malheureusement, pour les fonctions f que l'on peut envisager (par exemple $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \exp(x)$) il n'y a pas de traduction simple de la loi générale en termes de premier chiffre significatif. Ces généralisations ne sont donc pas aussi spectaculaires que la loi obtenue avec $f(x) = \log_{10}(x)$. Elles sont cependant utiles, car elles procurent des outils de détection de fraude.

UTILISER LA LOI DE BENFORD GÉNÉRALE POUR DÉTECTER DES FRAUDES

La loi de Benford a maintes fois été utilisée pour détecter des fraudes. Un livre récent est même consacré à ce sujet (Mark Nigrini, *Benford's Law: Applications for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection*, Wiley, 2012).

Le principe est simple: s'ils s'étalent régulièrement sur plusieurs ordres de grandeur, les nombres apparaissant dans des comptes ou des statistiques doivent, sauf raisons particulières, vérifier la loi de Benford. Si ce sont des nombres inventés, leur auteur risque d'avoir voulu en créer à peu près autant qui commencent par 1 que par 2, 3, etc. N'étant pas averti de la propriété qu'énonce la loi de Benford, le faussaire ne la respectera pas. Si les données suspectes ne concordent pas avec la loi de Benford, on conclura que les données ont été falsifiées.

Cela s'est produit à propos de l'expertise de données financières et fiscales, cela s'est produit en science où des tests ont repéré des données d'expériences frauduleuses. La loi de Benford a aussi été utilisée pour distinguer des images numériques artificielles d'images numériques naturelles ou pour identifier quelles étaient les images d'une série qui contenaient des données cachées (stéganographie).

Un problème apparaît. À force de parler de la loi de Benford, les tricheurs de données pourraient en être informés. Ils s'appliqueraient à produire des données inventées qui la respectent et passeraient ainsi à travers les outils de repérage statistique fondés sur la loi de Benford. La loi générale permet de contrer ce risque: en utilisant les variantes avec diverses fonctions f , on repérera les données falsifiées.

Pour tester cette méthode, une série d'expériences a été réalisée par un groupe de chercheurs réunis autour de Nicolas Gauvrit. Nous

décrivons ici l'une des expériences menées. Les productions pseudoaléatoires humaines ont été examinées dans quatre contextes où l'on constate la loi de Benford sur les chiffres significatifs.

Un groupe de 169 adultes, recrutés *via* les réseaux sociaux ou par courrier électronique, a participé à cette expérience. Leurs âges variaient de 13 à 73 ans. Les participants ont été répartis au hasard en quatre groupes pour s'occuper de données:

(a) sur la population des 5000 villes américaines les plus peuplées,

(b) sur des constantes mathématiques provenant des tables de Simon Plouffe,

(c) sur les distances en années-lumière entre la Terre et les étoiles visibles les plus proches,

(d) sur les nombres de cas de tuberculose par pays pour l'année 2012.

Dans chaque groupe, les participants ont été informés que l'on avait sélectionné au hasard une série de 30 nombres dans les données réelles, et qu'ils devaient tenter de produire ce qu'ils pensaient être une série analogue et plausible de 30 nombres. Des séries de 30 nombres provenant des bases de données réelles ont aussi été constituées.

Pour chaque ensemble de 30 valeurs de r (fabriquées ou réelles), on a examiné les distributions des parties fractionnaires des $f(r)$, avec $f(r) = \text{Log}(r)$, $f(r) = \pi r^2$ et $f(r) = \sqrt{r}$. L'écart par rapport à la loi de Benford générale a été mesuré par une méthode classique (la statistique de Kolmogorov-Smirnov). Comme prévu, les données fabriquées par les humains se conforment moins bien à la loi de Benford que les données réelles (voir l'encadré 4).

Sur les 12 comparaisons (3 fonctions, 4 types de données), une seule exception a été notée provenant de la comparaison des données de la table de constantes de Simon Plouffe testées avec la loi de Benford pour la fonction $f(r) = \pi r^2$: dans ce cas, les humains sont en moyenne plus conformes à ce que prévoit la loi de Benford que les données réelles!

La conclusion est donc claire: les humains se font repérer par la loi de Benford générale quand ils tentent de fabriquer de fausses données.

D'autres résultats de l'étude menée suggèrent aussi que, selon le type de données dont on veut contrôler l'authenticité, certains choix de la fonction remplaçant $\log_{10}$ dans la loi de Benford générale sont préférables à d'autres. Comprendre pourquoi sera important pour créer des outils de détection auxquels plus aucun fraudeur ne pourra échapper. Mais, c'est certain, grâce à la loi de Benford générale, la panoplie des chasseurs de tricheurs numériques s'est enrichie d'une nouvelle arme puissante. ■