

L'ESSENTIEL

> Emmy Noether était une brillante mathématicienne allemande, dont la carrière a été entravée par divers facteurs.

> Ses importants apports à l'algèbre abstraite ont mis au second plan certains autres travaux, notamment deux théorèmes qu'elle a publiés en 1918.

> Ces théorèmes, dont le premier est davantage connu que le second, relient symétries d'un système physique et lois de conservation.

> Ils sont le résultat de recherches menées pour éclaircir des questions posées par la théorie de la relativité générale.

L'AUTEUR



DAVID E. ROWE
professeur émérite d'histoire
des sciences à l'université
Johannes-Gutenberg de Mayence,
en Allemagne

Emmy Noether le centenaire d'un théorème

Figure dominante de l'école allemande d'algèbre à Göttingen durant les années 1920-1933, Emmy Noether a aussi marqué le développement de la physique théorique en démontrant qu'à toute symétrie continue d'un système physique correspond une grandeur conservée.

Il y a cent ans, en 1918, la mathématicienne allemande Emmy Noether publiait un article intitulé «Invariantenprobleme» («Problèmes variationnels invariants»). Cet article et les théorèmes qu'il contenait sont aujourd'hui considérés comme l'un des grands jalons du développement de la physique théorique du xx^e siècle. Cependant, ces travaux ne sont devenus célèbres que de façon posthume. La condition de femme ainsi que l'opinion modeste qu'avait Emmy Noether de ses propres résultats ne sont que deux des facteurs qui expliquent pourquoi.

De son vivant et longtemps après sa mort en 1935, cette mathématicienne a eu son nom exclusivement associé à son rôle majeur dans le développement de l'algèbre abstraite moderne, dans les années 1920. En partie à cause de son influence et de son prestige en tant qu'algébriste, peu se souvenaient qu'Emmy Noether avait également joué un rôle éminent dans l'élucidation de certaines zones d'ombre mathématiques de la théorie de la relativité générale d'Einstein, et en particulier celles

entourant le statut des lois de conservation dans cette théorie.

Il convient cependant de souligner que le principal théorème qu'avait démontré Emmy Noether avait une grande généralité : il se rapportait tout autant à la mécanique classique qu'aux théories des champs (dont la théorie du champ électromagnétique ou celle de la relativité générale sont des exemples). En fait, le théorème de Noether fournit un éclairage profond sur les lois de conservation dans presque tout type de système physique, en les liant étroitement à des symétries – ou des invariances – du système.

En particulier, parmi les applications de ce théorème clé, on retrouve les lois de conservation usuelles portant sur la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie. Par exemple, le théorème de Noether fait apparaître la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système physique isolé comme la conséquence de la symétrie ou invariance du système par des translations dans l'espace. Ici, «symétrie par des translations dans l'espace» signifie que les équations >

Portrait d'Emmy Noether peint (acrylique sur toile) par Jennifer Mondfrans, une artiste qui vit à San Francisco. Ce portrait est inspiré d'une photographie de la mathématicienne prise vers 1907, quand elle avait moins de 30 ans.

> décrivant la dynamique du système restent inchangées quand le système subit une translation (modification de l'origine du système de coordonnées utilisé ou, ce qui est équivalent, changement de la position occupée dans l'espace).

De la même façon, la conservation du moment cinétique traduit une symétrie du système par rotation (c'est-à-dire que le système n'est pas modifié si l'on change son orientation); et la conservation de l'énergie correspond à une symétrie par translation dans le temps (c'est-à-dire que le système n'est pas modifié si on décale l'origine de l'axe des temps).

NON PAS UN, MAIS DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX

De nos jours, le théorème de Noether occupe une bonne place dans les manuels de physique moderne. Pourtant, comme la mathématicienne française Yvette Kosmann-Schwarzbach l'a montré dans son ouvrage de 2006, qui fait référence, les physiciens ont mis du temps à se rendre compte pleinement de la signification de ce résultat. Même à ce jour, peu de commentateurs ont souligné que l'article originel d'Emmy Noether contient en fait non pas un, mais deux théorèmes fondamentaux.

Qui plus est, ces deux théorèmes sont essentiels pour comprendre la motivation initiale de ses travaux, à savoir la distinction entre ce qu'Emmy Noether appelait les lois de conservation «propres» et «impropres» de la physique. Ces recherches ont été menées dans le cadre de discussions complexes sur le statut de la conservation de l'énergie dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, cadre que je vais essayer de brièvement décrire ici.

Emmy Noether a été une mathématicienne dont la puissance et l'éclat ont mis du temps à s'affirmer. Certaines circonstances personnelles l'expliquent probablement en partie.

INVARIANTS EN MATHÉMATIQUES ET EN PHYSIQUE

La théorie classique des invariants a des liens étroits avec la géométrie projective analytique, domaine où l'on étudie les propriétés de figures qui restent inchangées sous l'effet de transformations linéaires des coordonnées. Un exemple simple est constitué par les courbes algébriques de degré 2; une telle courbe est l'ensemble de points de coordonnées (x, y) qui satisfont une équation de la forme : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Géométriquement, de telles courbes sont des coniques (intersections d'un plan avec un cône), et les quantités $a + c$ et $ac - b^2$ sont invariantes (à un facteur près commun aux deux quantités). Sauf cas particuliers, la courbe sera soit une ellipse, soit une hyperbole; son équation peut alors être transformée en $x^2/p^2 \pm y^2/q^2 = 1$, le signe $\pm$ permettant de distinguer le type de la conique. On peut alors aisément voir qu'on a $a + c = 1/p^2 \pm 1/q^2$ et $ac - b^2 = \pm 1/(p^2 q^2)$.

En physique aussi, l'existence d'invariants est très fréquente. Un exemple élémentaire porte sur les vecteurs. Tout vecteur dans l'espace est caractérisé par une longueur et une direction. Dans un système de coordonnées donné, le vecteur $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a pour longueur $\|v_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Cette longueur est un invariant : elle ne change pas si on translate le système de coordonnées ou si on le fait tourner. Pour deux vecteurs donnés v_1 et v_2 , on aura trois invariants par rapport aux mêmes transformations : les longueurs de chacun d'eux et leur produit scalaire $v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Tout autre invariant lié aux deux vecteurs donnés peut s'exprimer en fonction de ceux-là. En physique relativiste, les invariants fondamentaux font intervenir une quatrième coordonnée pour le temps, affectée d'un signe différent de celui des trois coordonnées de l'espace (une quantité invariante étant alors du type $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$, où c désigne la vitesse de la lumière).

En théorie de la relativité restreinte, il s'agit d'invariants par rapport à un groupe de transformations de coordonnées nommé groupe de Lorentz. En théorie de la relativité générale, on autorise des transformations arbitraires des coordonnées, qui n'altèrent pas certaines grandeurs particulières (des invariants différentiels). Les équations du champ gravitationnel d'Einstein, qui régissent le mouvement de la matière et de la lumière, s'expriment en fonction de telles entités. Ces équations sont dites généralement covariantes, car elles gardent la même forme sous l'action des transformations arbitraires mentionnées précédemment.

D. R.

Une mathématicienne dont la puissance et l'éclat ont mis du temps à s'affirmer