

> décrivant la dynamique du système restent inchangées quand le système subit une translation (modification de l'origine du système de coordonnées utilisé ou, ce qui est équivalent, changement de la position occupée dans l'espace).

De la même façon, la conservation du moment cinétique traduit une symétrie du système par rotation (c'est-à-dire que le système n'est pas modifié si l'on change son orientation); et la conservation de l'énergie correspond à une symétrie par translation dans le temps (c'est-à-dire que le système n'est pas modifié si on décale l'origine de l'axe des temps).

NON PAS UN, MAIS DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX

De nos jours, le théorème de Noether occupe une bonne place dans les manuels de physique moderne. Pourtant, comme la mathématicienne française Yvette Kosmann-Schwarzbach l'a montré dans son ouvrage de 2006, qui fait référence, les physiciens ont mis du temps à se rendre compte pleinement de la signification de ce résultat. Même à ce jour, peu de commentateurs ont souligné que l'article originel d'Emmy Noether contient en fait non pas un, mais deux théorèmes fondamentaux.

Qui plus est, ces deux théorèmes sont essentiels pour comprendre la motivation initiale de ses travaux, à savoir la distinction entre ce qu'Emmy Noether appelait les lois de conservation «propres» et «impropres» de la physique. Ces recherches ont été menées dans le cadre de discussions complexes sur le statut de la conservation de l'énergie dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, cadre que je vais essayer de brièvement décrire ici.

Emmy Noether a été une mathématicienne dont la puissance et l'éclat ont mis du temps à s'affirmer. Certaines circonstances personnelles l'expliquent probablement en partie.

INVARIANTS EN MATHÉMATIQUES ET EN PHYSIQUE

La théorie classique des invariants a des liens étroits avec la géométrie projective analytique, domaine où l'on étudie les propriétés de figures qui restent inchangées sous l'effet de transformations linéaires des coordonnées. Un exemple simple est constitué par les courbes algébriques de degré 2; une telle courbe est l'ensemble de points de coordonnées (x, y) qui satisfont une équation de la forme : $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Géométriquement, de telles courbes sont des coniques (intersections d'un plan avec un cône), et les quantités $a + c$ et $ac - b^2$ sont invariantes (à un facteur près commun aux deux quantités). Sauf cas particuliers, la courbe sera soit une ellipse, soit une hyperbole; son équation peut alors être transformée en $x^2/p^2 \pm y^2/q^2 = 1$, le signe $\pm$ permettant de distinguer le type de la conique. On peut alors aisément voir qu'on a $a + c = 1/p^2 \pm 1/q^2$ et $ac - b^2 = \pm 1/(p^2 q^2)$.

En physique aussi, l'existence d'invariants est très fréquente. Un exemple élémentaire porte sur les vecteurs. Tout vecteur dans l'espace est caractérisé par une longueur et une direction. Dans un système de coordonnées donné, le vecteur $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a pour longueur $\|v_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Cette longueur est un invariant : elle ne change pas si on translate le système de coordonnées ou si on le fait tourner. Pour deux vecteurs donnés v_1 et v_2 , on aura trois invariants par rapport aux mêmes transformations : les longueurs de chacun d'eux et leur produit scalaire $v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Tout autre invariant lié aux deux vecteurs donnés peut s'exprimer en fonction de ceux-là. En physique relativiste, les invariants fondamentaux font intervenir une quatrième coordonnée pour le temps, affectée d'un signe différent de celui des trois coordonnées de l'espace (une quantité invariante étant alors du type $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$, où c désigne la vitesse de la lumière).

En théorie de la relativité restreinte, il s'agit d'invariants par rapport à un groupe de transformations de coordonnées nommé groupe de Lorentz. En théorie de la relativité générale, on autorise des transformations arbitraires des coordonnées, qui n'altèrent pas certaines grandeurs particulières (des invariants différentiels). Les équations du champ gravitationnel d'Einstein, qui régissent le mouvement de la matière et de la lumière, s'expriment en fonction de telles entités. Ces équations sont dites généralement covariantes, car elles gardent la même forme sous l'action des transformations arbitraires mentionnées précédemment.

D. R.

Une mathématicienne dont la puissance et l'éclat ont mis du temps à s'affirmer



La rue de l'Université à Erlangen, en 1916. Emmy Noether est née dans cette ville et y est restée la plupart du temps jusqu'en 1915, année où elle est partie pour Göttingen à l'invitation de David Hilbert et Felix Klein.

Née en 1882 dans la petite ville d'Erlangen, en Franconie (dans le nord de la Bavière), elle est longtemps restée connue simplement en tant que la fille de Max Noether, un éminent géomètre algébriste. La famille Noether faisait partie de l'élite intellectuelle juive en Allemagne, et les mathématiques représentaient l'un des rares champs académiques où les jeunes hommes juifs avaient de réelles chances d'obtenir un poste de professeur d'université. Fritz, frère cadet d'Emmy, devint ainsi un professeur renommé de mathématiques appliquées, à Karlsruhe puis à Breslau (voir la photographie page 77).

Entre 1900 et 1902, on autorisa Emmy à assister, en tant qu'auditrice libre, à des cours de mathématiques et de langues modernes à l'université où exerçait son père. Elle fut l'une des deux seules femmes mêlées aux 984 hommes qui suivaient alors des cours à Erlangen. Toutefois, en 1903, la Bavière ouvrit ses universités aux femmes (les universités prussiennes firent de même en 1908). Emmy opta pour les mathématiques et suivit des cours donnés par son père et son collègue Paul Gordan. Après un semestre passé à Erlangen, elle partit pour Göttingen, alors en Prusse, où elle assista à des cours donnés par David Hilbert, Felix Klein, Hermann Minkowski, Otto Blumenthal et Karl Schwarzschild. Mais elle tomba malade et retourna donc à la tranquille Erlangen, où elle obtint en 1907 son doctorat avec les félicitations du jury (la mention *summa cum laude*).

Emmy Noether passa sa thèse de doctorat sous la direction de Paul Gordan, connu de ses contemporains comme le « roi de la théorie des invariants ». Gordan était l'un des derniers grands spécialistes en calculs algébriques compliqués et, sans surprise, la thèse d'Emmy Noether – qu'elle dénigra plus tard, car elle la considérait comme une œuvre de jeunesse trop immature – démontra sa capacité à manier de

LE CALCUL VARIATIONNEL EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

Le calcul des variations, ou calcul variationnel, a été développé afin de résoudre des problèmes de minimisation ou de maximisation d'une certaine grandeur qui dépend du chemin pris parmi une multitude de chemins possibles. En 1696, le Suisse Jean Bernoulli posa le problème suivant : deux points dans un plan vertical étant donnés, trouver la trajectoire de chute libre allant de l'un à l'autre et pour laquelle la durée de la chute est minimale. Il résolut lui-même ce célèbre problème dit de la brachistochrone en s'appuyant sur une analogie optique (le principe de Fermat, selon lequel la lumière suit le trajet le plus rapide) et en en déduisant l'équation différentielle vérifiée par le chemin qui assure la descente la plus rapide (ce chemin se trouve être une courbe appelée cycloïde).

Plus tard, Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange inventèrent des méthodes variationnelles pour résoudre

de tels problèmes, méthodes liées aux principes de l'« action » en physique. En mécanique classique, l'action A d'un système est donnée par une intégrale sur le temps t , entre deux instants t_1 et t_2 , d'une grandeur notée L et nommée lagrangien. Pour une particule, par exemple, le lagrangien L est une fonction de la position $x(t)$ et de la vitesse $v(t) = dx(t)/dt$. Le lagrangien correspond à la quantité $T - V$, où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

On peut alors obtenir les équations du mouvement du système en imposant que l'intégrale définissant l'action A soit minimale, ce qui représente une contrainte sur le chemin $x(t)$ adopté par le système. La formulation mathématique de cette contrainte mène aux équations dites d'Euler-Lagrange, qui sont équivalentes aux équations du mouvement obtenues par l'application directe des lois classiques de Newton.

Ces méthodes ont été utilisées pour formaliser le principe de moindre action, nommé plus tard principe de Hamilton, et pour le généraliser aux théories des champs comme l'électromagnétisme et la relativité générale.

D. R.