



La rue de l'Université à Erlangen, en 1916. Emmy Noether est née dans cette ville et y est restée la plupart du temps jusqu'en 1915, année où elle est partie pour Göttingen à l'invitation de David Hilbert et Felix Klein.

Née en 1882 dans la petite ville d'Erlangen, en Franconie (dans le nord de la Bavière), elle est longtemps restée connue simplement en tant que la fille de Max Noether, un éminent géomètre algébriste. La famille Noether faisait partie de l'élite intellectuelle juive en Allemagne, et les mathématiques représentaient l'un des rares champs académiques où les jeunes hommes juifs avaient de réelles chances d'obtenir un poste de professeur d'université. Fritz, frère cadet d'Emmy, devint ainsi un professeur renommé de mathématiques appliquées, à Karlsruhe puis à Breslau (voir la photographie page 77).

Entre 1900 et 1902, on autorisa Emmy à assister, en tant qu'auditrice libre, à des cours de mathématiques et de langues modernes à l'université où exerçait son père. Elle fut l'une des deux seules femmes mêlées aux 984 hommes qui suivaient alors des cours à Erlangen. Toutefois, en 1903, la Bavière ouvrit ses universités aux femmes (les universités prussiennes firent de même en 1908). Emmy opta pour les mathématiques et suivit des cours donnés par son père et son collègue Paul Gordan. Après un semestre passé à Erlangen, elle partit pour Göttingen, alors en Prusse, où elle assista à des cours donnés par David Hilbert, Felix Klein, Hermann Minkowski, Otto Blumenthal et Karl Schwarzschild. Mais elle tomba malade et retourna donc à la tranquille Erlangen, où elle obtint en 1907 son doctorat avec les félicitations du jury (la mention *summa cum laude*).

Emmy Noether passa sa thèse de doctorat sous la direction de Paul Gordan, connu de ses contemporains comme le « roi de la théorie des invariants ». Gordan était l'un des derniers grands spécialistes en calculs algébriques compliqués et, sans surprise, la thèse d'Emmy Noether – qu'elle dénigra plus tard, car elle la considérait comme une œuvre de jeunesse trop immature – démontra sa capacité à manier de

LE CALCUL VARIATIONNEL EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

Le calcul des variations, ou calcul variationnel, a été développé afin de résoudre des problèmes de minimisation ou de maximisation d'une certaine grandeur qui dépend du chemin pris parmi une multitude de chemins possibles. En 1696, le Suisse Jean Bernoulli posa le problème suivant : deux points dans un plan vertical étant donnés, trouver la trajectoire de chute libre allant de l'un à l'autre et pour laquelle la durée de la chute est minimale. Il résolut lui-même ce célèbre problème dit de la brachistochrone en s'appuyant sur une analogie optique (le principe de Fermat, selon lequel la lumière suit le trajet le plus rapide) et en en déduisant l'équation différentielle vérifiée par le chemin qui assure la descente la plus rapide (ce chemin se trouve être une courbe appelée cycloïde).

Plus tard, Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange inventèrent des méthodes variationnelles pour résoudre

de tels problèmes, méthodes liées aux principes de l'« action » en physique. En mécanique classique, l'action A d'un système est donnée par une intégrale sur le temps t , entre deux instants t_1 et t_2 , d'une grandeur notée L et nommée lagrangien. Pour une particule, par exemple, le lagrangien L est une fonction de la position $x(t)$ et de la vitesse $v(t) = dx(t)/dt$. Le lagrangien correspond à la quantité $T - V$, où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

On peut alors obtenir les équations du mouvement du système en imposant que l'intégrale définissant l'action A soit minimale, ce qui représente une contrainte sur le chemin $x(t)$ adopté par le système. La formulation mathématique de cette contrainte mène aux équations dites d'Euler-Lagrange, qui sont équivalentes aux équations du mouvement obtenues par l'application directe des lois classiques de Newton.

Ces méthodes ont été utilisées pour formaliser le principe de moindre action, nommé plus tard principe de Hamilton, et pour le généraliser aux théories des champs comme l'électromagnétisme et la relativité générale.

D. R.

➤ tels calculs. En fait, la «mère de l'algèbre moderne» était elle-même une calculatrice de premier plan, même si c'est sa démarche conceptuelle qui l'a rendue célèbre.

Au cours des huit années suivantes, Emmy continua à mûrir en tant que mathématicienne, en particulier sous l'influence du successeur de Gordan, Ernst Fischer. Elle put finalement échapper à son isolement des débuts de la Première Guerre mondiale, quand les salles de cours de l'université se vidaient et que les tranchées se remplissaient. Au département de mathématiques de l'université de Göttingen, Hilbert et Klein étaient en effet continuellement à la recherche de nouveaux talents, et ils invitèrent ainsi Emmy Noether à venir les rejoindre au printemps de 1915.

Cette offre vint probablement avec l'assurance que la faculté de philosophie de Göttingen soutiendrait ensuite sa candidature pour son *Habilitation*, qualification nécessaire pour enseigner. Mais même l'appui de personnalités aussi influentes que Klein et Hilbert ne put garantir cette issue: cela ne vint qu'après la guerre, dans le climat plus libéral de la jeune république de Weimar.

LA CONDITION DE FEMME, OBSTACLE À LA CARRIÈRE

Déjà en 1907, des discussions avaient eu lieu sur la possibilité d'autoriser des femmes ayant les compétences requises à enseigner dans une université prussienne comme celle de Göttingen. Comme les professeurs s'y étaient opposés à la quasi-unanimité, le ministère de tutelle avait décidé de conserver, dans le règlement de l'*Habilitation*, la clause qui excluait explicitement les femmes. Lorsque le cas d'Emmy Noether se présenta à la faculté de Göttingen huit ans plus tard, la section des mathématiques et des sciences vota à 10 voix contre 7 pour une exemption au règlement. Tous les membres de la faculté participèrent alors à une réunion houleuse, au cours de laquelle Hilbert railla l'opposition en proclamant: «Nous sommes une université, pas un établissement de bains!»

En fin de compte, le ministère refusa de céder. Hilbert se rendit alors à Berlin pour négocier avec ses représentants, et réussit à obtenir d'eux une concession substantielle: à partir du semestre d'hiver 1916-1917, Hilbert put annoncer des cours donnés par «le Professeur Hilbert avec l'assistance de Mademoiselle le docteur Noether». En fait, seule Emmy Noether dispensa ces cours.

Un autre personnage d'envergure ayant apporté son soutien à Emmy Noether était Albert Einstein, qui avait de bonnes relations avec les mathématiciens de Göttingen. Tout comme Klein et Hilbert, Einstein appréciait clairement les talents d'Emmy. Après avoir lu

LES DEUX THÉORÈMES DE NOETHER

Comme Emmy Noether le faisait remarquer au début de son article de 1918, son approche mêlait méthodes du calcul variationnel et théorie de Lie des équations différentielles invariantes par transformations infinitésimales. Tôt dans sa carrière, au XIX^e siècle, le mathématicien norvégien Sophus Lie avait eu l'idée que pour intégrer (c'est-à-dire résoudre) une équation différentielle, il fallait trouver une petite perturbation des courbes solutions de l'équation qui laisse invariante la famille de ces courbes (autrement dit, en appliquant la transformation aux solutions de l'équation, on reste à l'intérieur de l'ensemble des solutions).

Ainsi, s'inspirant de la théorie de Lie, Emmy a énoncé et prouvé un premier théorème, selon lequel pour un système physique décrit par un lagrangien (voir l'encadré page 75), le nombre de grandeurs

physiques conservées est égal au nombre de variations infinitésimales indépendantes qui laissent invariante l'« action » du système (cette action s'exprime sous la forme d'une intégrale portant sur le lagrangien).

Ce premier théorème se rapporte à des groupes de transformations qui dépendent d'un nombre fini de paramètres (par exemple, le groupe des rotations dans le plan dépend d'un seul paramètre, qui est l'angle de la rotation).

Le second théorème de Noether porte sur des groupes de transformations qui dépendent d'un nombre fini de fonctions et de leurs dérivées. En suivant Lie, elle nomma « groupes finis continus » les groupes du premier type, et « groupes continus infinis » ceux du deuxième type.

Le second théorème montre que pour une invariance sous des transformations d'un groupe infini, les équations d'Euler-Lagrange obtenues ne sont plus indépendantes les unes des autres, mais satisfont au contraire certaines identités. Dans le cadre de la relativité générale, ce groupe infini est constitué des transformations induites par des changements arbitraires des coordonnées. Emmy Noether donnait ainsi une explication aux quatre identités que Hilbert avait remarquées en 1915. Plutôt que de leur attribuer une signification physique, elle souligna que ces relations sont des lois de conservation impropres, qui n'ont aucun parallèle avec les lois de conservation de la mécanique classique ou de la relativité restreinte.

D. R.

son article de 1918, il écrira à Hilbert: «Je suis impressionné que l'on puisse considérer ces choses d'un point de vue si général. Cela ne ferait pas de mal aux troupes de retour à Göttingen après le champ de bataille de suivre les cours de M^{lle} Noether. Elle semble très bien connaître son affaire!»

Ce n'est qu'au printemps 1915, peu de temps après l'arrivée d'Emmy Noether à Göttingen, qu'Einstein vint y donner une série de cours sur la théorie de la relativité générale. Cette visite eut lieu quelques mois seulement avant des avancées spectaculaires réalisées en novembre 1915. C'est en effet à ce moment que Hilbert et Einstein découvrirent, chacun de son côté, des équations du champ gravitationnel satisfaisant au principe généralisé de relativité, selon lequel les lois de la physique doivent garder la même forme quel que soit le référentiel